
Mathematik III: Partielle Differentialgleichungen

Übungsstunde 5

Fourierreihen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 15.10.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Fourierreihen und Fourier-Koeffizienten
2. Konvergenz von Fourierreihen
3. Periodische Fortsetzungen und Fourier-Sinus-/Cosinus-Reihen
4. Komplexe Fourierreihen
5. Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung

1 Fourierreihen und Fourier-Koeffizienten

Für eine L -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fourierreihe gegeben durch

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Für $n = 0$ vereinfacht sich der Cosinus-Term zu 1, sodass

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Fourier-Partialsumme

Bricht man die Fourierreihe nach dem N -ten Term ab, erhält man die N -te Fourier-Partialsumme

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right).$$

Symmetrie auf einem symmetrischen Intervall

Für Symmetrieargumente ist es oft praktisch, eine ganze Periode symmetrisch um den Ursprung zu wählen. Wir setzen dazu

$$\ell = \frac{L}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad L = 2\ell$$

und betrachten somit eine Periode auf

$$x \in [-\ell, \ell].$$

Die Fourierreihe lautet dann

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \right)$$

mit

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx, \\a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \\b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx.\end{aligned}$$

Wichtig. Die Symmetrie bezieht sich auf die gesamte 2ℓ -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f zunächst nur auf einem Intervall gegeben, muss zuerst die entsprechende periodische Fortsetzung betrachtet werden.

Falls f gerade ist:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \, dx, \\a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \\b_n &= 0.\end{aligned}$$

Es bleibt eine Fourier-Cosinus-Reihe.

Falls f ungerade ist:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0, \\a_n &= 0, \\b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx.\end{aligned}$$

Es bleibt eine Fourier-Sinus-Reihe.

2 Konvergenz von Fourierreihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **stückweise stetig differenzierbar**, wenn sie auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbar ist.

Konvergenzsatz

Sei f eine stückweise stetig differenzierbare L -periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe von f

- an jeder Stetigkeitsstelle x gegen

$$S_f(x) = f(x)$$

- und an jeder Unstetigkeitsstelle x gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$S_f(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) .$$

Dabei bezeichnen

$$f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y), \quad f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$$

den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert.

Merke. Bei einer periodischen Fortsetzung muss insbesondere an den “Klebestellen” geprüft werden, ob die Funktion dort stetig ist.

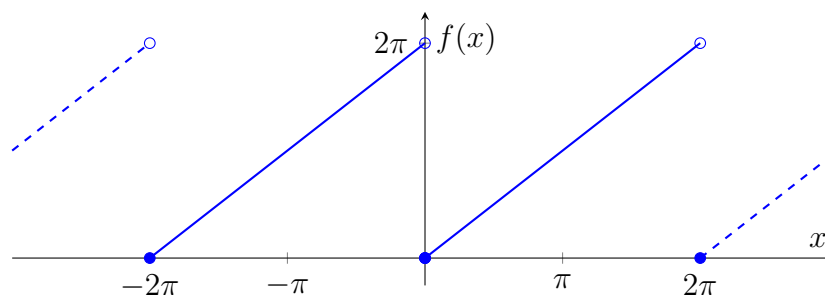
Der Konvergenzsatz gilt analog auch für die Fourier-Sinus-Reihe, die Fourier-Cosinus-Reihe und die komplexe Fourierreihe.

Beispiel: Sägezahnfunktion

Die 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 2\pi,$$

ist die sogenannte Sägezahnfunktion.



Man erkennt den Sprung bei $x = 0$ (bzw. allgemein bei $x = 2k\pi$). Daher gilt dort nach dem Konvergenzsatz

$$S_f(0) = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi.$$

Moodle-Quiz 5: Fourierreihen und Konvergenzsatz

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

Die Fourierreihe von f sei gegeben durch

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

(a) Berechne die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_n und b_n .

$$a_0 = \quad a_n = \quad b_n = \quad n \geq 1.$$

(b) Bestimme die dritte Fourier-Partialsumme $S_3(x)$ unter Verwendung der in Teil (a) berechneten Fourier-Koeffizienten und schreibe die Summe vollständig aus.

$$S_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

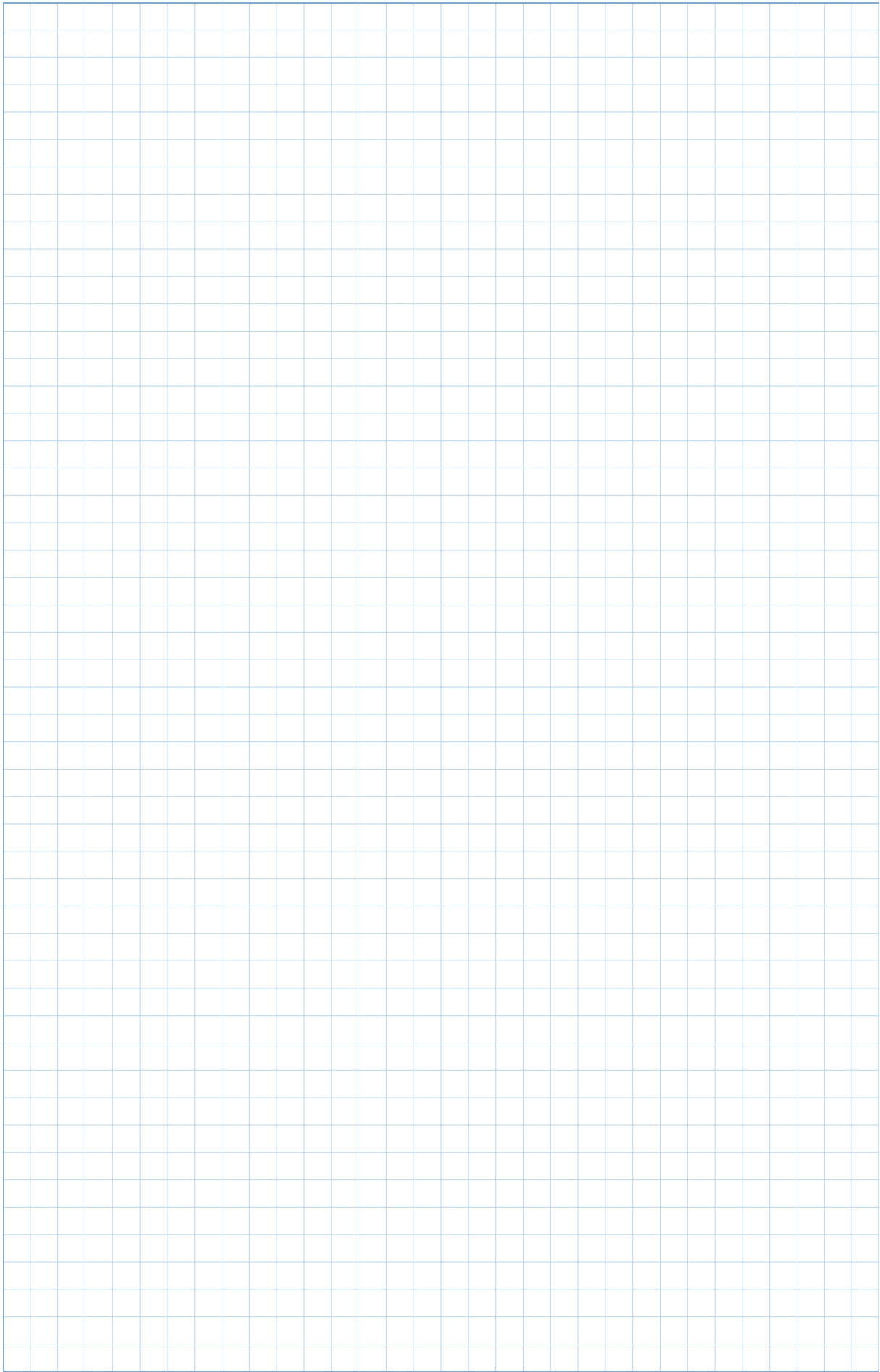
(c) Bestimme gegen welche Werte die Fourierreihe an den Stellen

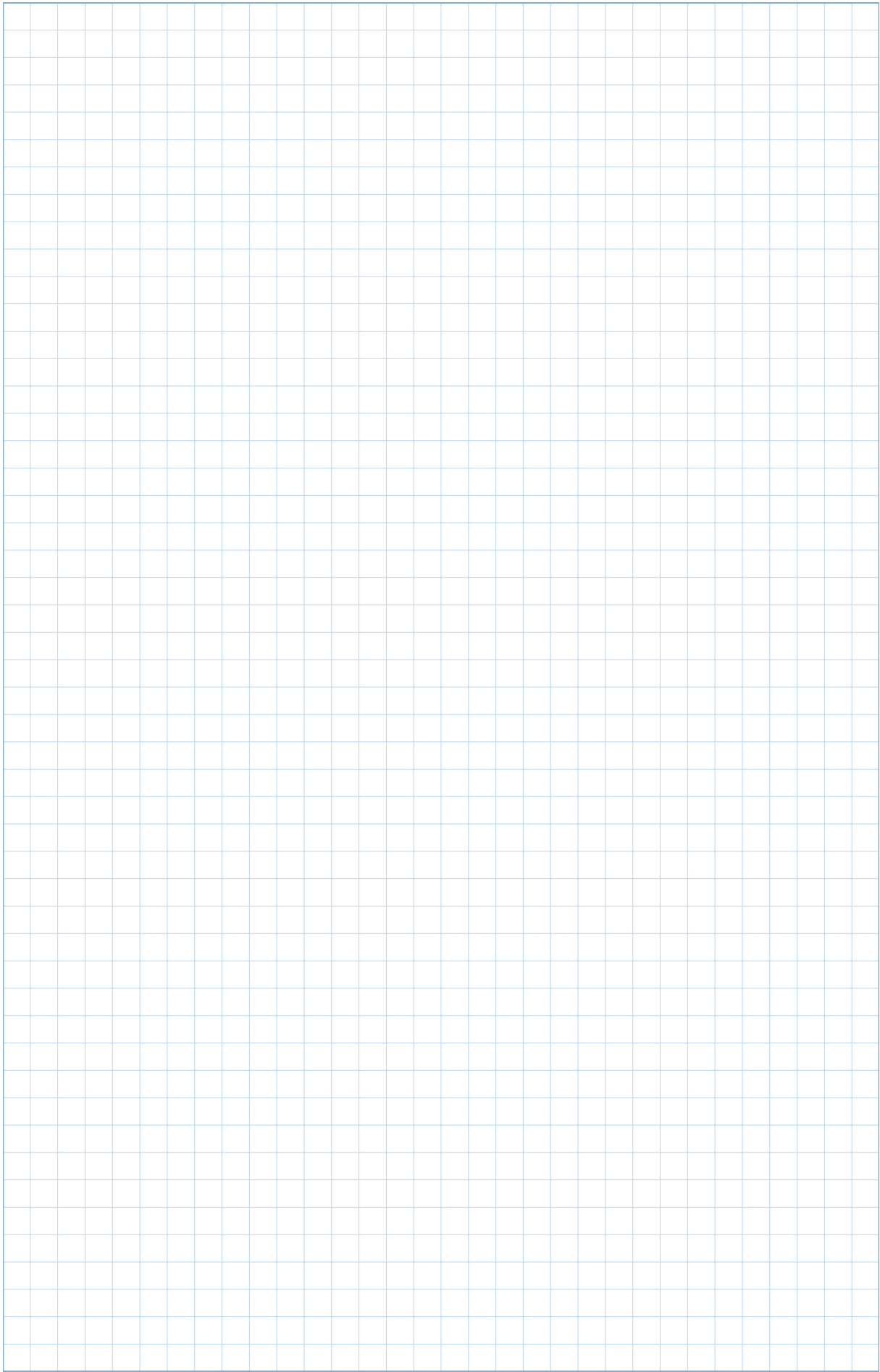
$$-\frac{\pi}{2}, \quad 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi$$

konvergiert.

$$S_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \quad S_f(0) =$$

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \quad S_f(2\pi) =$$





3 Periodische Fortsetzungen und Fourier-Sinus-/Cosinus-Reihen

Oft ist eine Funktion zunächst nur auf einem beschränkten Intervall gegeben. Um Fourierreihen verwenden zu können, kann die Funktion periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

L -periodische Fortsetzung

Sei

$$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben und

$$L = b - a.$$

Die L -periodische Fortsetzung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entsteht, indem der Graph von f periodisch wiederholt wird:

$$g(x) = f(x - kL), \quad k \in \mathbb{Z},$$

wobei k so gewählt wird, dass

$$x - kL \in [a, b).$$

Anschaulich werden also Kopien des Graphen von f aneinandergereiht.

Gerade $2L$ -periodische Fortsetzung

Sei nun

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion f kann auf $[0, L]$ beliebig gegeben sein; insbesondere muss sie keine bestimmte Symmetrie besitzen. Durch Spiegelung an der y -Achse erhält man eine gerade Fortsetzung auf $[-L, L]$.

$$\boxed{\tilde{f}(x) = f(|x|)}.$$

Die fortgesetzte Funktion $\tilde{f}$ ist damit automatisch gerade:

$$\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x).$$

Anschliessend wird $\tilde{f}$ $2L$ -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

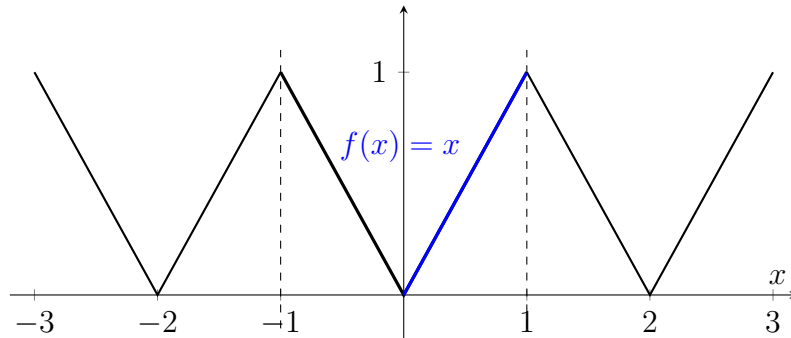
Da die fortgesetzte Funktion gerade ist, verschwinden alle Sinus-Koeffizienten:

$$b_n = 0.$$

Die Fourierreihe besteht daher nur aus Cosinus-Terms:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Man spricht von der **Fourier-Cosinus-Reihe**.



$$f(x) = x \text{ auf } [0, 1] \implies \tilde{f}(x) = |x| \text{ auf } [-1, 1] \implies 2\text{-periodische Fortsetzung.}$$

Ungerade $2L$ -periodische Fortsetzung

Sei wieder

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion f kann auf $[0, L]$ beliebig gegeben sein; insbesondere muss sie keine bestimmte Symmetrie besitzen. Durch Punktspiegelung am Ursprung erhält man eine ungerade Fortsetzung auf $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} f(|x|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Die fortgesetzte Funktion $\tilde{f}$ ist damit automatisch ungerade:

$$\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x).$$

Anschliessend wird $\tilde{f}$ $2L$ -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

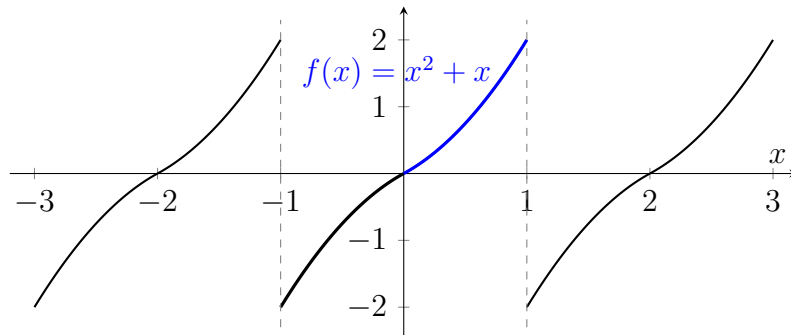
Da die fortgesetzte Funktion ungerade ist, verschwinden alle Cosinus-Koeffizienten:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Fourierreihe besteht daher nur aus Sinus-Terms:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Man spricht von der **Fourier-Sinus-Reihe**.



$f(x) = x^2 + x$ auf $[0, 1] \implies$ ungerade Fortsetzung auf $[-1, 1] \implies$ 2-periodische Fortsetzung.

Merke. Für eine Funktion, die nur auf $[0, L]$ gegeben ist, kann man durch eine gerade bzw. ungerade Fortsetzung festlegen, ob man eine Fourier-Cosinus- oder eine Fourier-Sinus-Reihe erhält.

gerade Fortsetzung	$\implies$	Fourier-Cosinus-Reihe,
ungerade Fortsetzung	$\implies$	Fourier-Sinus-Reihe.

4 Komplexe Fourierreihen

Die komplexe Fourierreihe einer L -periodischen, eventuell komplexwertigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist definiert durch

$$S_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x / L}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei läuft der Summationsindex über alle ganzen Zahlen:

$$n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Komplexe Fourierreihe auf einem symmetrischen Intervall

Für eine 2ℓ -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wählen wir eine ganze Periode auf

$$x \in [-\ell, \ell].$$

Die komplexe Fourierreihe lautet dann

$$S_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i n \pi x / \ell}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i n \pi x / \ell} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe

Mit den Euler-Formeln

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

kann zwischen beiden Darstellungen umgerechnet werden.

Von a_n, b_n zu c_n :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1$$

Von c_n zu a_n, b_n :

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \geq 1$$

Für reellwertige Funktionen f :

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n)$$

Merke. Die reelle und die komplexe Fourierreihe enthalten dieselbe Information.

Übung: Reelle und komplexe Fourierreihe

Betrachte die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

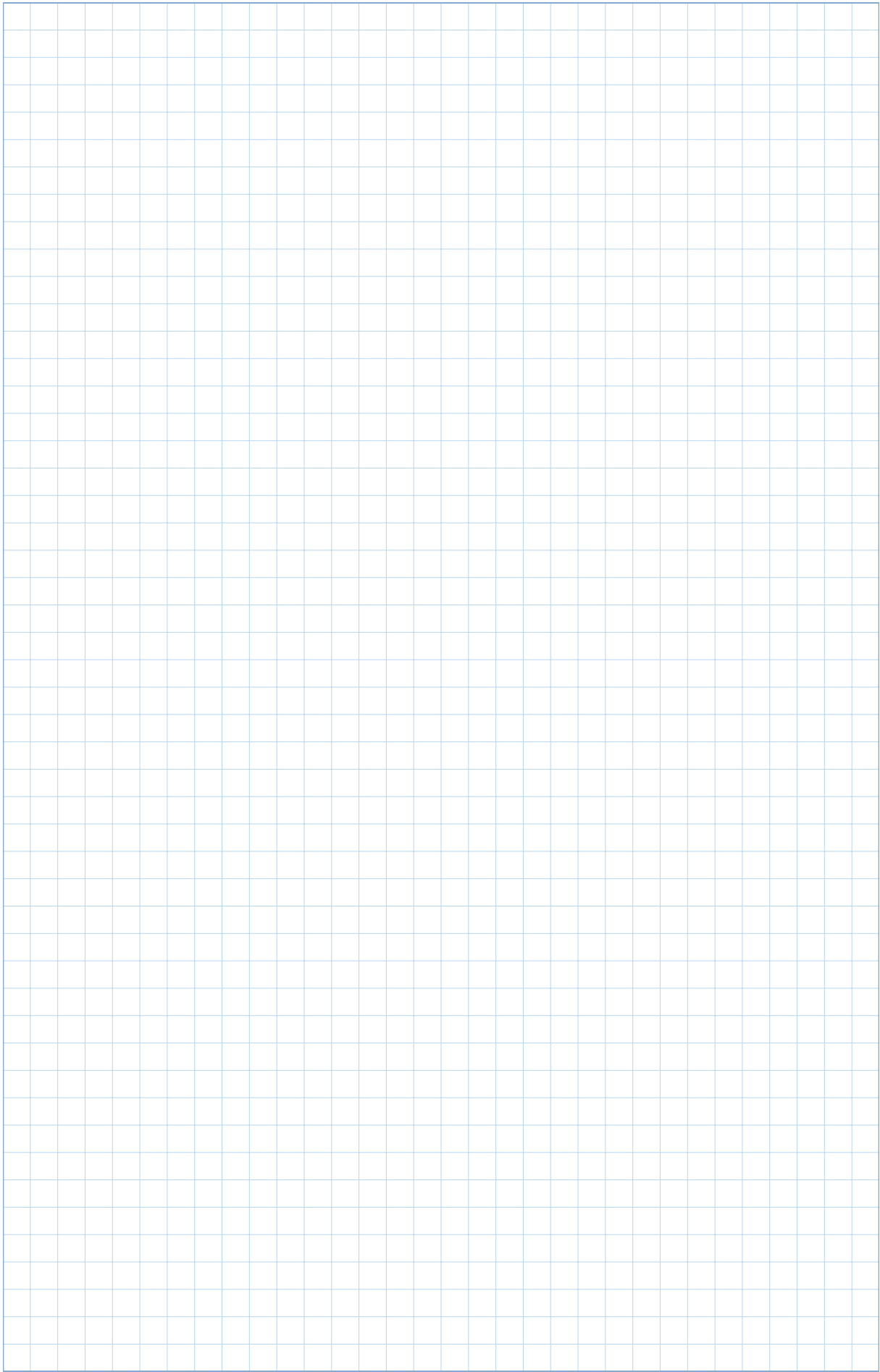
$$f(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi).$$

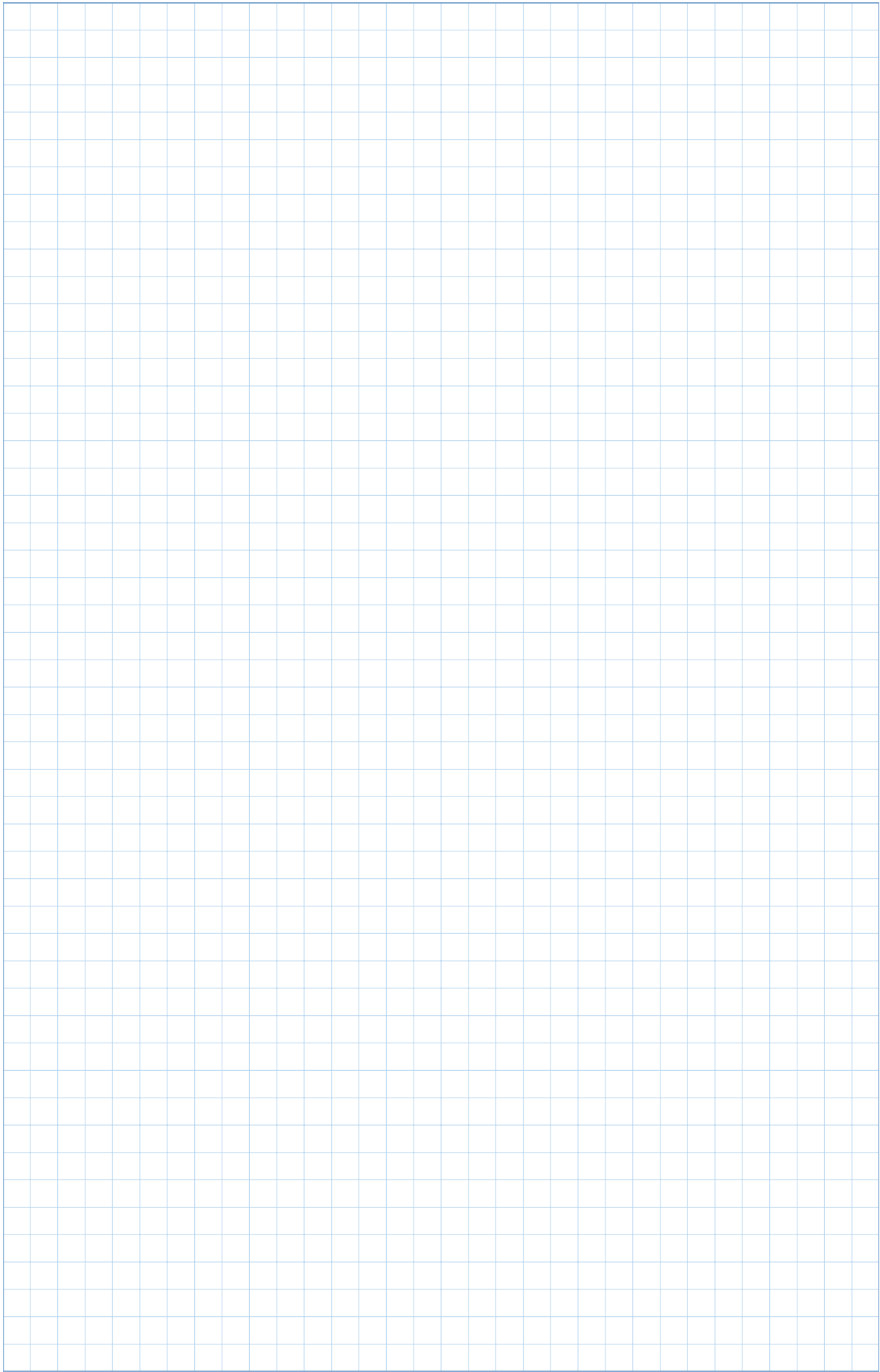
- (a) Berechne die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \geq 1$.
- (b) Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten c_n für $n \in \mathbb{Z}$ und bestimme daraus die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n .
- (c) Welche Berechnung ist hier einfacher: die reelle oder die komplexe?

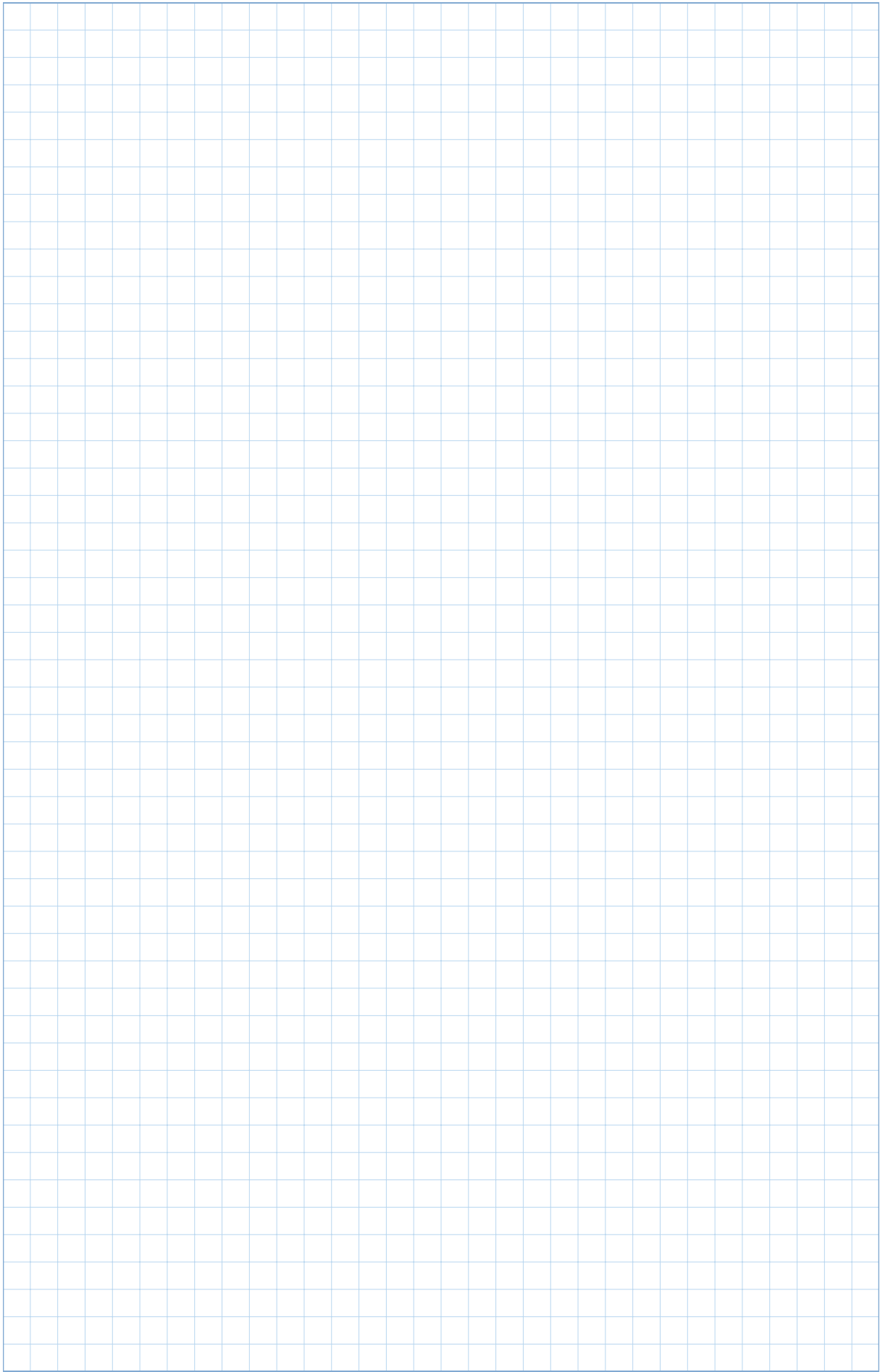
Hinweis.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx.$$







5 Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung

Betrachten wir die periodische Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad -\pi < x < \pi, \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi), & t > 0, \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi), & t > 0, \\ u(0, x) = e^x, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Mit der komplexen Fourierreihe

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{inx} = -n^2 e^{inx}$$

erhält jeder Fourier-Modus den Zeitfaktor

$$e^{-n^2 t}.$$

Damit gilt für die zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten

$$\boxed{c_n(t) = c_n(0) e^{-n^2 t}.$$

Also

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Aus der Anfangsbedingung $u(0, x) = e^x$ und der vorherigen Aufgabe gilt

$$c_n(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n (1 + in)}{1 + n^2}.$$

Somit folgt

$$u(t, x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (1 + in)}{1 + n^2} e^{-n^2 t} e^{inx}.$$