
Mathematik III: Partielle Differentialgleichungen

Übungsstunde 5

Fourierreihen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 15.10.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Fourierreihen und Fourier-Koeffizienten
2. Konvergenz von Fourierreihen
3. Periodische Fortsetzungen und Fourier-Sinus-/Cosinus-Reihen
4. Komplexe Fourierreihen
5. Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung

1 Fourierreihen und Fourier-Koeffizienten

Für eine L -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fourierreihe gegeben durch

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Für $n = 0$ vereinfacht sich der Cosinus-Term zu 1, sodass

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Fourier-Partialsumme

Bricht man die Fourierreihe nach dem N -ten Term ab, erhält man die N -te Fourier-Partialsumme

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right).$$

Symmetrie auf einem symmetrischen Intervall

Für Symmetrieargumente ist es oft praktisch, eine ganze Periode symmetrisch um den Ursprung zu wählen. Wir setzen dazu

$$\ell = \frac{L}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad L = 2\ell$$

und betrachten somit eine Periode auf

$$x \in [-\ell, \ell].$$

Die Fourierreihe lautet dann

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \right)$$

mit

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx, \\a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \\b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx.\end{aligned}$$

Wichtig. Die Symmetrie bezieht sich auf die gesamte 2ℓ -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f zunächst nur auf einem Intervall gegeben, muss zuerst die entsprechende periodische Fortsetzung betrachtet werden.

Falls f gerade ist:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \, dx, \\a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \\b_n &= 0.\end{aligned}$$

Es bleibt eine Fourier-Cosinus-Reihe.

Falls f ungerade ist:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0, \\a_n &= 0, \\b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx.\end{aligned}$$

Es bleibt eine Fourier-Sinus-Reihe.

2 Konvergenz von Fourierreihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **stückweise stetig differenzierbar**, wenn sie auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbar ist.

Konvergenzsatz

Sei f eine stückweise stetig differenzierbare L -periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe von f

- an jeder Stetigkeitsstelle x gegen

$$S_f(x) = f(x)$$

- und an jeder Unstetigkeitsstelle x gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$S_f(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) .$$

Dabei bezeichnen

$$f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y), \quad f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$$

den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert.

Merke. Bei einer periodischen Fortsetzung muss insbesondere an den “Klebestellen” geprüft werden, ob die Funktion dort stetig ist.

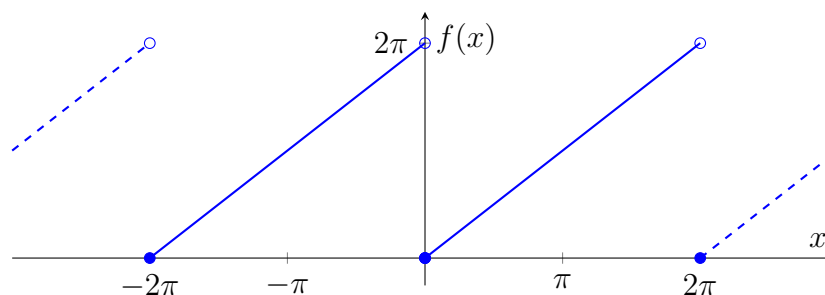
Der Konvergenzsatz gilt analog auch für die Fourier-Sinus-Reihe, die Fourier-Cosinus-Reihe und die komplexe Fourierreihe.

Beispiel: Sägezahnfunktion

Die 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 2\pi,$$

ist die sogenannte Sägezahnfunktion.



Man erkennt den Sprung bei $x = 0$ (bzw. allgemein bei $x = 2k\pi$). Daher gilt dort nach dem Konvergenzsatz

$$S_f(0) = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi.$$

Moodle-Quiz 5: Fourierreihen und Konvergenzsatz

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

Die Fourierreihe von f sei gegeben durch

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

(a) Berechne die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_n und b_n .

$$a_0 = 2\pi \quad a_n = 0 \quad b_n = -\frac{2}{n} \quad n \geq 1.$$

(b) Bestimme die dritte Fourier-Partialsumme $S_3(x)$ unter Verwendung der in Teil (a) berechneten Fourier-Koeffizienten und schreibe die Summe vollständig aus.

$$S_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

(c) Bestimme gegen welche Werte die Fourierreihe an den Stellen

$$-\frac{\pi}{2}, \quad 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi$$

konvergiert.

$$S_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \quad S_f(0) = \pi$$

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad S_f(2\pi) = \pi$$

a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \frac{1}{2\pi} [x^2]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (4\pi^2 - 0^2) = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) \, dx$$

$$\begin{array}{l|l} u=x & v'=\cos(nx) \\ u'=1 & v=\frac{1}{n}\sin(nx) \end{array}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[x \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \, dx \right)$$

0 da $\sin(2n\pi) = \sin(0) = 0$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) \, dx = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{n} \left[\cos(nx) \right]_0^{2\pi}$$

0

$$\cos(2n\pi) - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{a_n = 0}} \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) \, dx$$

$$\begin{array}{l|l} u=x & v'=\sin(nx) \\ u'=1 & v=-\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left(-[x \cos(nx)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left(-(\underbrace{2\pi \cdot \cos(2n\pi)}_1 - 0) + \frac{1}{n} [\sin(nx)]_0^{2\pi} \right)$$

0

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \cdot (-2\pi)$$

$$\underline{\underline{b_n = -\frac{2}{n}}} \quad n \geq 1$$

b)

$$S_3(x) = \frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^3 \left(\cancel{a_n^0} \cos(nx) + \cancel{b_n^{-2/n}} \sin(nx) \right)$$

$$S_3(x) = \frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^3 -\frac{2}{n} \sin(nx)$$

$$S_3(x) = \pi - \sum_{n=1}^3 \frac{2}{n} \sin(nx) = \pi - \left(\frac{2}{1} \sin(x) + \frac{2}{2} \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) \right)$$

$$\underline{\underline{S_3(x) = \pi - 2\sin(x) - \sin(2x) - \frac{2}{3}\sin(3x)}}$$

c)

$$\underline{\underline{x = -\frac{\pi}{2}}}$$

Wegen 2π Periodizität gilt $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$, f stetig bei $x = \frac{3\pi}{2}$

$$S_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

Bei $x=0$ liegt eine Sprungstelle vor:

$$S_f(0) = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$$

$$f \text{ stetig bei } \frac{\pi}{2}, \quad S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\underline{\underline{x = 2\pi}}$$

Bei $x=0$ liegt eine Sprungstelle vor:

$$S_f(0) = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \underline{\underline{\pi}}$$

3 Periodische Fortsetzungen und Fourier-Sinus-/Cosinus-Reihen

Oft ist eine Funktion zunächst nur auf einem beschränkten Intervall gegeben. Um Fourierreihen verwenden zu können, kann die Funktion periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

L -periodische Fortsetzung

Sei

$$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben und

$$L = b - a.$$

Die L -periodische Fortsetzung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entsteht, indem der Graph von f periodisch wiederholt wird:

$$g(x) = f(x - kL), \quad k \in \mathbb{Z},$$

wobei k so gewählt wird, dass

$$x - kL \in [a, b).$$

Anschaulich werden also Kopien des Graphen von f aneinandergereiht.

Gerade $2L$ -periodische Fortsetzung

Sei nun

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion f kann auf $[0, L]$ beliebig gegeben sein; insbesondere muss sie keine bestimmte Symmetrie besitzen. Durch Spiegelung an der y -Achse erhält man eine gerade Fortsetzung auf $[-L, L]$.

$$\boxed{\tilde{f}(x) = f(|x|)}.$$

Die fortgesetzte Funktion $\tilde{f}$ ist damit automatisch gerade:

$$\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x).$$

Anschliessend wird $\tilde{f}$ $2L$ -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

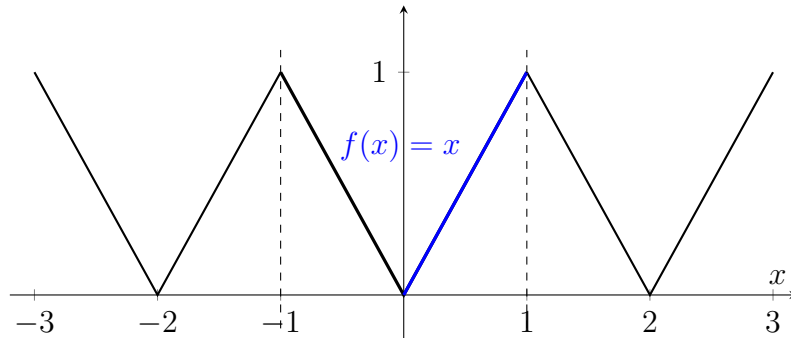
Da die fortgesetzte Funktion gerade ist, verschwinden alle Sinus-Koeffizienten:

$$b_n = 0.$$

Die Fourierreihe besteht daher nur aus Cosinus-Terms:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Man spricht von der **Fourier-Cosinus-Reihe**.



$$f(x) = x \text{ auf } [0, 1] \implies \tilde{f}(x) = |x| \text{ auf } [-1, 1] \implies 2\text{-periodische Fortsetzung.}$$

Ungerade $2L$ -periodische Fortsetzung

Sei wieder

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion f kann auf $[0, L]$ beliebig gegeben sein; insbesondere muss sie keine bestimmte Symmetrie besitzen. Durch Punktspiegelung am Ursprung erhält man eine ungerade Fortsetzung auf $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} f(|x|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Die fortgesetzte Funktion $\tilde{f}$ ist damit automatisch ungerade:

$$\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x).$$

Anschließend wird $\tilde{f}$ $2L$ -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

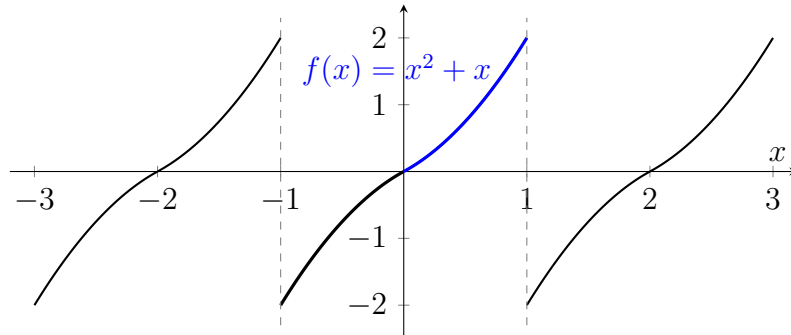
Da die fortgesetzte Funktion ungerade ist, verschwinden alle Cosinus-Koeffizienten:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Fourierreihe besteht daher nur aus Sinus-Terms:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Man spricht von der **Fourier-Sinus-Reihe**.



$f(x) = x^2 + x$ auf $[0, 1] \implies$ ungerade Fortsetzung auf $[-1, 1] \implies$ 2-periodische Fortsetzung.

Merke. Für eine Funktion, die nur auf $[0, L]$ gegeben ist, kann man durch eine gerade bzw. ungerade Fortsetzung festlegen, ob man eine Fourier-Cosinus- oder eine Fourier-Sinus-Reihe erhält.

gerade Fortsetzung	$\implies$	Fourier-Cosinus-Reihe,
ungerade Fortsetzung	$\implies$	Fourier-Sinus-Reihe.

4 Komplexe Fourierreihen

Die komplexe Fourierreihe einer L -periodischen, eventuell komplexwertigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist definiert durch

$$S_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x / L}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei läuft der Summationsindex über alle ganzen Zahlen:

$$n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Komplexe Fourierreihe auf einem symmetrischen Intervall

Für eine 2ℓ -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wählen wir eine ganze Periode auf

$$x \in [-\ell, \ell].$$

Die komplexe Fourierreihe lautet dann

$$S_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i n \pi x / \ell}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i n \pi x / \ell} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe

Mit den Euler-Formeln

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

kann zwischen beiden Darstellungen umgerechnet werden.

Von a_n, b_n zu c_n :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1$$

Von c_n zu a_n, b_n :

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \geq 1$$

Für reellwertige Funktionen f :

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n)$$

Merke. Die reelle und die komplexe Fourierreihe enthalten dieselbe Information.

Übung: Reelle und komplexe Fourierreihe

Betrachte die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi).$$

- (a) Berechne die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \geq 1$.
- (b) Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten c_n für $n \in \mathbb{Z}$ und bestimme daraus die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n .
- (c) Welche Berechnung ist hier einfacher: die reelle oder die komplexe?

Hinweis.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx.$$

a)

$$\begin{cases} \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = [e^x]_{-\pi}^{\pi} = e^{\pi} - e^{-\pi} = \underline{\underline{2 \sinh(\pi)}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x dx \rightarrow I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{Siehe Analysis A ÜS 11} \\ \text{Partielle Integration:} \\ \text{Tabellenmethode} \end{array} \right\}$$

D	I
$+\cos(nx)$	e^x
$-n \cdot \sin(nx)$	e^x
$+n^2 \cos(nx)$	e^x

$$I = + [\cos(nx) \cdot e^x]_{-\pi}^{\pi} - [-n \sin(nx) e^x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} n^2 \cos(nx) e^x dx$$

$$I = \underbrace{\cos(n\pi) e^{\pi} - \cos(-n\pi) e^{\pi}}_{\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)} + n \cdot (\sin(n\pi) e^{\pi} - \sin(-n\pi) e^{\pi}) - n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x dx$$

$$I = \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x dx}_{-n^2 I}$$

$$I = (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 I$$

$$I = (-1)^n \cdot 2 \sinh(\pi) - n^2 I \quad / + n^2 I$$

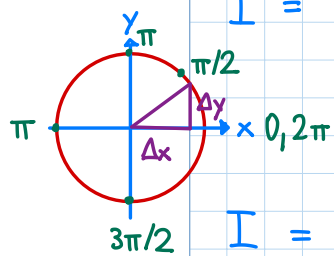
$$I + n^2 I = 2 \sinh(\pi) \cdot (-1)^n$$

$$(1 + n^2) I = 2 \sinh(\pi) \cdot (-1)^n \quad / : (1 + n^2)$$

$$I = 2 \sinh(\pi) \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x dx = 2 \sinh(\pi) \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x dx = \underline{\underline{2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}}}$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) e^x dx \rightarrow I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) e^x dx$$

	D	I
+	$\sin(nx)$	e^x
-	$n \cos(nx)$	e^x
+	$-n^2 \sin(nx)$	e^x

$$I = + [\sin(nx) e^x]_{-\pi}^{\pi} - [n \cos(nx) e^x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} -n^2 \sin(nx) e^x dx$$

$$I = -n [\cos(nx) e^x]_{-\pi}^{\pi} - n^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) e^x dx}$$

$$I = -n (\cos(n\pi) e^{\pi} - \cos(-n\pi) e^{-\pi}) - n^2 I$$

$$I = -n \cos(n\pi) (e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 I$$

$$I = -n (-1)^n \cdot 2 \sinh(\pi) - n^2 I \quad / + n^2 I$$

$$I + n^2 I = -2 \sinh(\pi) (-1)^n n$$

$$(1 + n^2) I = -2 \sinh(\pi) (-1)^n n \quad / : n^2 + 1$$

$$I = -2 \sinh(\pi) \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) e^x dx = \frac{1}{\pi} I = \underline{\underline{-2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cdot n}}$$

b)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-in} [e^{(1-in)x}]_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-in} \underbrace{(e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi})}_{\substack{e^{\pi} \cdot e^{-in\pi} - e^{-\pi} \cdot e^{in\pi} \\ e^{\pi} \cdot (-1)^n - e^{-\pi} \cdot (-1)^n}}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-in} (-1)^n \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-in}$$

~~2sinh(π)~~

$$c_n = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{1-in}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{array} \right\}$$

Bei komplexen Brüchen sollte man den Nenner immer reell machen mit verwenden vom komplex-konjugierten $\bar{z} = x - iy$

↓
Siehe Analysis A ÜS 2 und 3

$$\frac{1}{1-in} \cdot \frac{1+in}{1+in}$$

$$\frac{1+in}{1^2 - i^2 n^2} = \frac{1+in}{n^2 + 1}$$

$$c_n = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cdot (1+in)$$

$f(x) = e^x$ reellwertige Fkt. →

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2c_0 = 2\sinh(\pi) \\ a_n = 2\operatorname{Re}(c_n) = 2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cdot 1 \\ b_n = -2\operatorname{Im}(c_n) = -2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cdot n \end{array} \right.$$

d)

In diesem Bsp. ist die Berechnung über komplexe Fourier-Koeffizienten schneller da nur ein Integral berechnet werden musste und nicht partiell integriert werden musste.

Dafür erfordert die komplexe Methode einen sicheren

Umgang mit komplexen Zahlen. Falls die wichtigsten Rechenregeln nicht mehr präsent sind siehe Analysis A ÜS 2 & 3.

5 Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung

Betrachten wir die periodische Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, -\pi < x < \pi, \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi), & t > 0, \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi), & t > 0, \\ u(0, x) = e^x, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Mit der komplexen Fourierreihe

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{inx} = -n^2 e^{inx}$$

erhält jeder Fourier-Modus den Zeitfaktor

$$e^{-n^2 t}.$$

Damit gilt für die zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten

$$\boxed{c_n(t) = c_n(0) e^{-n^2 t}.$$

Also

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Aus der Anfangsbedingung $u(0, x) = e^x$ und der vorherigen Aufgabe gilt

$$c_n(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n (1 + in)}{1 + n^2}.$$

Somit folgt

$$u(t, x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (1 + in)}{1 + n^2} e^{-n^2 t} e^{inx}.$$