
Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 11

Visuelle Aufgaben: Graphen, Vektorfelder & Richtungsfelder

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 21.05.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Vektorfelder skizzieren
2. Feldlinien und Lösungskurven
3. Graphen von Funktionen $f(x, y)$ erkennen

1 Vektorfelder skizzieren

Was ist ein Vektorfeld?

Ein **Vektorfeld** ordnet jedem Punkt (x, y) in der Ebene einen Vektor zu. Man schreibt zum Beispiel

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet: An jedem Punkt (x, y) wird ein Pfeil eingezeichnet.

Dabei beschreibt

$$F_1(x, y)$$

die **horizontale Komponente** des Pfeils und

$$F_2(x, y)$$

die **vertikale Komponente** des Pfeils.

Man kann also auch schreiben:

$$\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{e}_x + F_2(x, y)\vec{e}_y.$$

Hier ist \vec{e}_x der Einheitsvektor in x -Richtung und \vec{e}_y der Einheitsvektor in y -Richtung.

Interpretation

Ein Vektorfeld kann man sich als eine Art **Strömungsfeld** vorstellen.

An jedem Punkt der Ebene zeigt ein Pfeil an,

- in welche Richtung sich ein Teilchen an diesem Punkt bewegen würde,
- und wie stark diese Bewegung dort ist.

Die **Richtung** des Pfeils gibt die Bewegungsrichtung an. Die **Länge** des Pfeils gibt die Stärke des Feldes an.

Wie skizziert man ein Vektorfeld?

Um ein Vektorfeld zu skizzieren, muss man nicht an jedem Punkt einen Pfeil exakt berechnen. Es genügt meistens, das **qualitative Verhalten** des Vektorfeldes zu verstehen.

Die Idee ist: Man untersucht die beiden Komponenten getrennt. Die erste Komponente bestimmt die Bewegung nach links oder rechts, die zweite Komponente bestimmt die Bewegung nach oben oder unten.

$$\begin{aligned}
F_1(x, y) > 0 &\Rightarrow \text{Pfeil zeigt nach rechts,} \\
F_1(x, y) < 0 &\Rightarrow \text{Pfeil zeigt nach links,} \\
F_2(x, y) > 0 &\Rightarrow \text{Pfeil zeigt nach oben,} \\
F_2(x, y) < 0 &\Rightarrow \text{Pfeil zeigt nach unten.}
\end{aligned}$$

Strategisches Vorgehen

1. Komponenten erkennen

Identifiziere zuerst die beiden Komponenten des Vektorfeldes:

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist F_1 für die horizontale Richtung und F_2 für die vertikale Richtung verantwortlich.

2. Horizontale Nullkomponente bestimmen

Untersuche, wo die horizontale Komponente verschwindet:

$$F_1(x, y) = 0.$$

Auf dieser Kurve haben die Pfeile **keine horizontale Komponente**. Sie zeigen dort also nur nach oben oder unten.

3. Vertikale Nullkomponente bestimmen

Untersuche, wo die vertikale Komponente verschwindet:

$$F_2(x, y) = 0.$$

Auf dieser Kurve haben die Pfeile **keine vertikale Komponente**. Sie zeigen dort also nur nach links oder rechts.

4. Nullstellen des Vektorfeldes suchen

Eine echte Nullstelle des Vektorfeldes liegt dort, wo beide Komponenten gleichzeitig verschwinden:

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = 0.$$

Dort gilt also

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

An solchen Punkten hat der Pfeil Länge 0. Diese Punkte nennt man auch **Gleichgewichtspunkte**.

5. Vorzeichen in den Gebieten untersuchen

Die Kurven

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = 0$$

teilen die Ebene oft in verschiedene Gebiete auf.

In jedem Gebiet untersucht man das Vorzeichen von F_1 und F_2 .

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} F_1 > 0, F_2 > 0 &\Rightarrow \text{Pfeile zeigen nach rechts oben,} \\ F_1 < 0, F_2 > 0 &\Rightarrow \text{Pfeile zeigen nach links oben,} \\ F_1 > 0, F_2 < 0 &\Rightarrow \text{Pfeile zeigen nach rechts unten,} \\ F_1 < 0, F_2 < 0 &\Rightarrow \text{Pfeile zeigen nach links unten.} \end{aligned}$$

6. Einige repräsentative Punkte einsetzen

Zur Kontrolle setzt man einige einfache Punkte ein, zum Beispiel

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1).$$

So kann man überprüfen, ob die Skizze sinnvoll ist.

7. Länge der Pfeile vergleichen

Die Länge eines Pfeils ist gegeben durch

$$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{F_1(x, y)^2 + F_2(x, y)^2}.$$

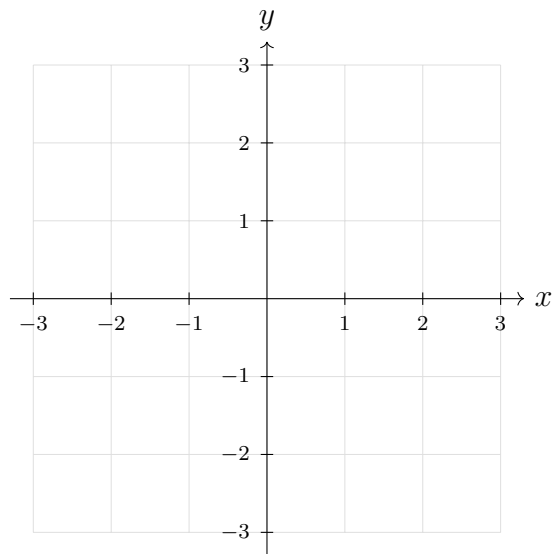
Für eine Skizze reicht es meistens zu erkennen, wo die Pfeile ungefähr länger oder kürzer werden.

Übungsaufgaben: Vektorfelder skizzieren

Aufgabe 1

Zeichne das Vektorfeld

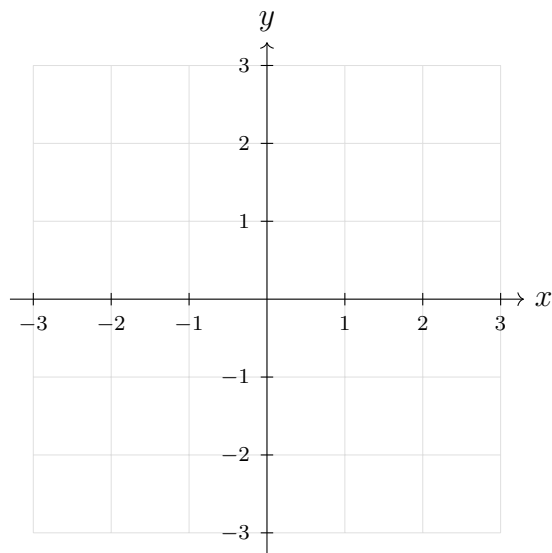
$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 2

Zeichne das Vektorfeld

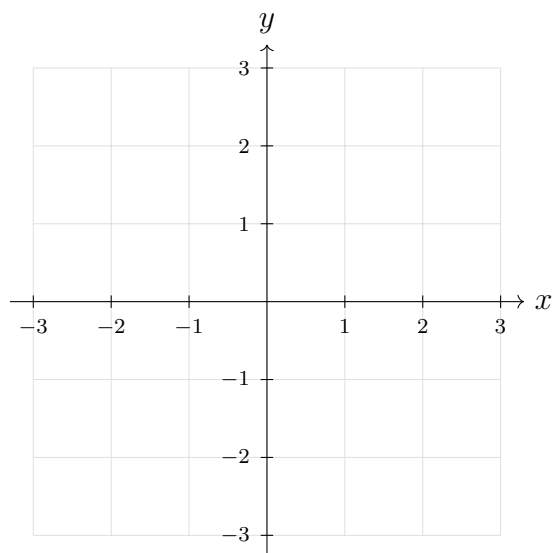
$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - x \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 3

Zeichne das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ y \end{pmatrix}.$$

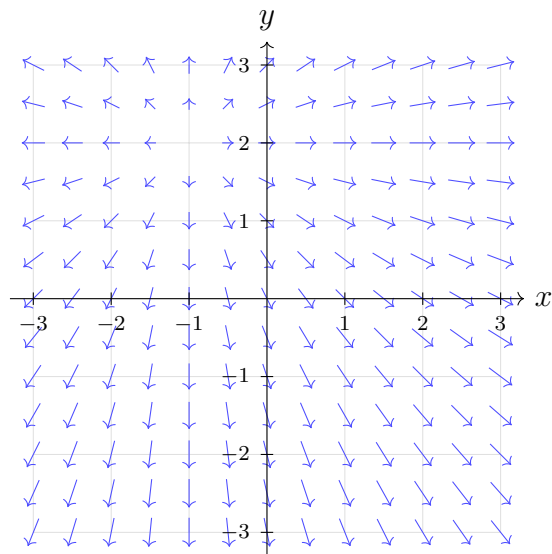


Übungsaufgaben: Vektorfelder skizzieren

Aufgabe 1

Zeichne das Vektorfeld

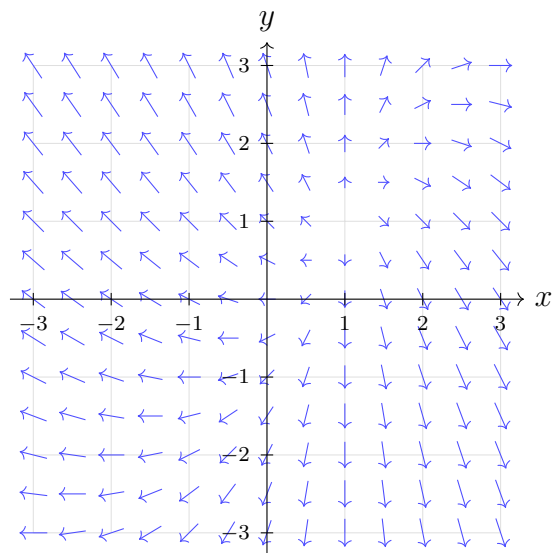
$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 2

Zeichne das Vektorfeld

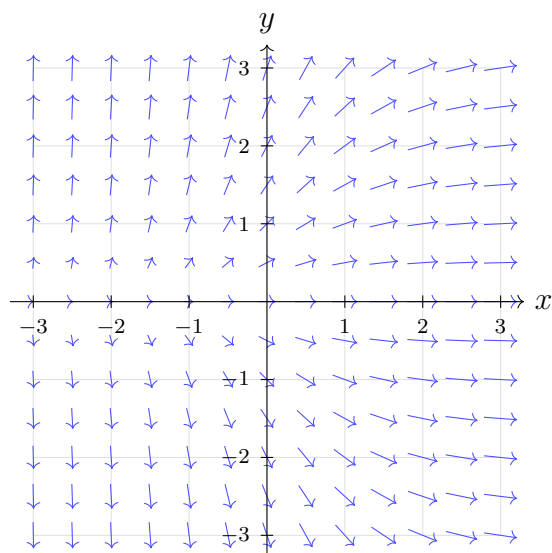
$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - x \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 3

Zeichne das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ y \end{pmatrix}.$$



2 Feldlinien und Lösungskurven

Grundidee

Ein Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

ordnet jedem Punkt (x, y) einen Pfeil zu. Eine **Feldlinie** ist eine Kurve, die diesen Pfeilen folgt.

Das bedeutet: Die Tangente an die Kurve zeigt in jedem Punkt in dieselbe Richtung wie das Vektorfeld an diesem Punkt.

Eine Kurve in der Ebene kann man durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

beschreiben. Ihre Tangente ist

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Damit die Kurve dem Vektorfeld folgt, muss gelten:

$$\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)).$$

Ausgeschrieben erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x(t), y(t)), \\ y'(t) = F_2(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Eine **Feldlinie** ist also eine Lösungskurve dieses Systems.

Interpretation

Man kann sich eine Feldlinie als Bahn eines Teilchens vorstellen. Das Teilchen befindet sich zu Beginn an einem Startpunkt. Das Vektorfeld gibt an jedem Punkt vor, in welche Richtung sich das Teilchen weiterbewegt.

Ein Startpunkt

$$\vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

bestimmt also die zugehörige Lösungskurve.

Anschaulich:

Vektorfeld = Pfeilbild,

Feldlinie = Kurve, die dem Pfeilbild folgt.

Richtungsfelder zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Ein wichtiger Spezialfall ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y).$$

Hier sucht man eine Funktion $y = y(x)$. Das Richtungsfeld gibt an jedem Punkt (x, y) die Steigung der Lösungskurve an.

Man kann diese Differentialgleichung als Vektorfeld auffassen, indem man schreibt:

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente ist immer 1. Das bedeutet: Man geht gedanklich immer ein Stück nach rechts. Die zweite Komponente gibt an, wie stark die Kurve dabei nach oben oder unten steigt.

Die Steigung des Pfeils ist

$$\frac{\text{vertikale Komponente}}{\text{horizontale Komponente}} = \frac{f(x, y)}{1} = f(x, y).$$

Damit passt das Richtungsfeld genau zur Differentialgleichung

$$y' = f(x, y).$$

Unterschied der beiden Sichtweisen

Es gibt also zwei eng verwandte Situationen:

Situation	Gleichung	Lösungskurve
gewöhnliche DGL	$y' = f(x, y)$	Graph einer Funktion $y(x)$
Vektorfeld / System	$\begin{cases} x' = F_1(x, y), \\ y' = F_2(x, y) \end{cases}$	Bahn $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung reicht eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0.$$

Bei einem System braucht man einen Startpunkt

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

In beiden Fällen bestimmt der Startpunkt die zugehörige Lösungskurve.

Merksatz

Feldlinien und Lösungskurven sind Kurven, die einem Richtungs- oder Vektorfeld folgen.
Für ein Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

erhält man die Feldlinien durch das System

$$x' = F_1(x, y), \quad y' = F_2(x, y).$$

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

zeichnet man ein Richtungsfeld, in dem jeder kleine Pfeil die Steigung

$$f(x, y)$$

hat.

Warum sind Richtungsfelder nützlich?

Das Richtungsfeld erlaubt es, Lösungskurven qualitativ zu skizzieren, ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen. Dies ist besonders wichtig, da viele Differentialgleichungen keine einfache analytische Lösung besitzen.

Numerische Verfahren wie das Euler-Verfahren nutzen genau diese Idee: Man startet bei einem Anfangspunkt und folgt schrittweise der durch das Richtungsfeld vorgegebenen Steigung.

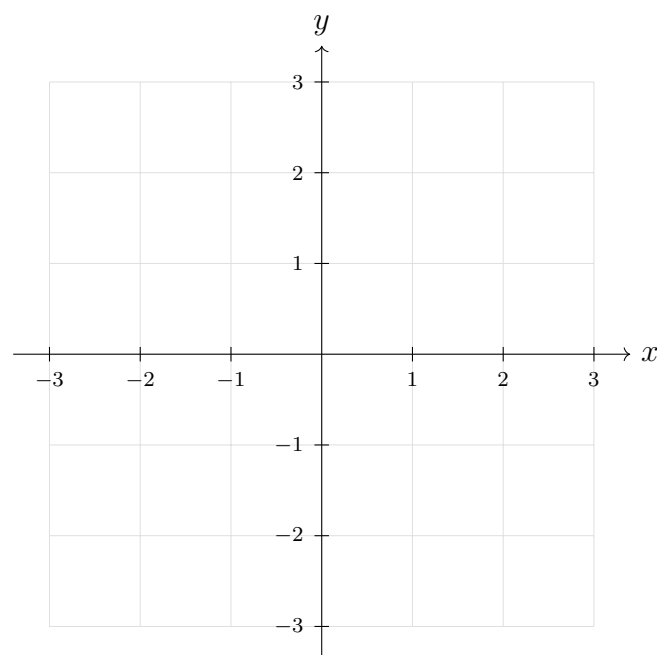
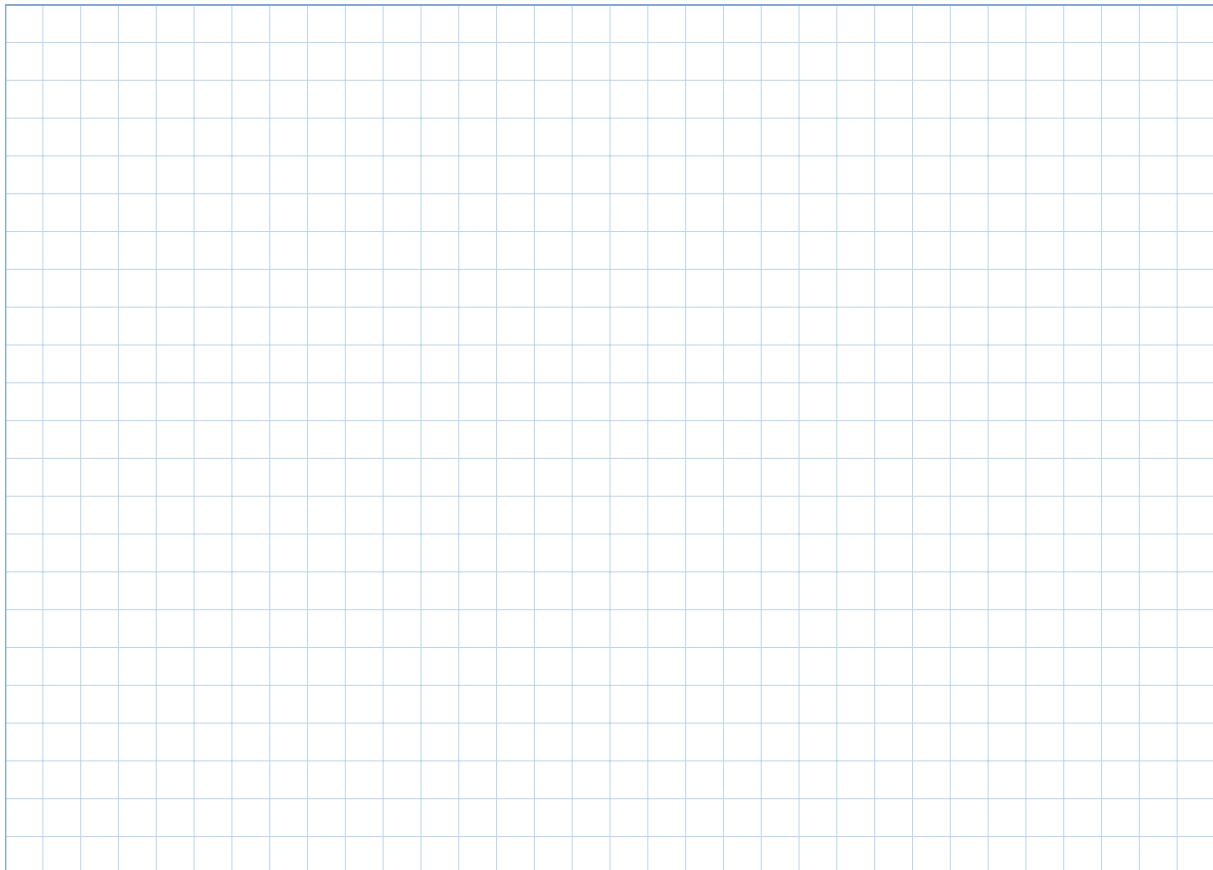
Übungsaufgaben: Feldlinien und Lösungskurven

Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Stelle das zugehörige Differentialgleichungssystem auf und skizziere einige Feldlinien.

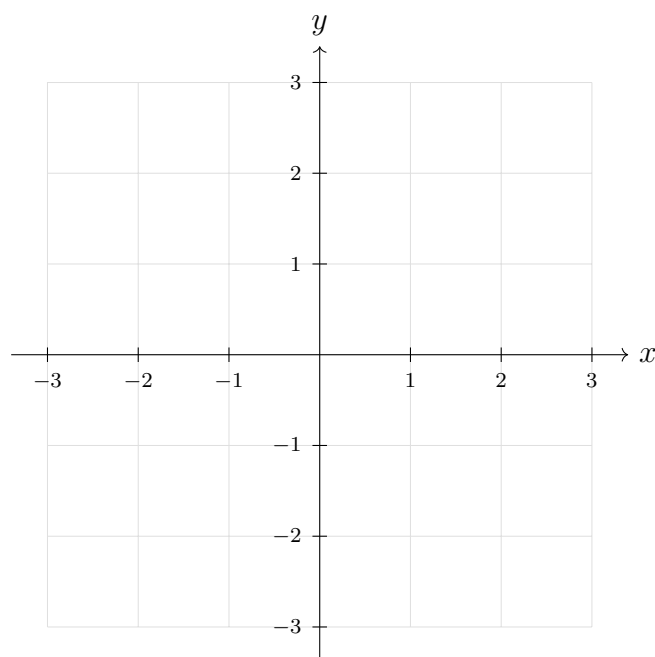
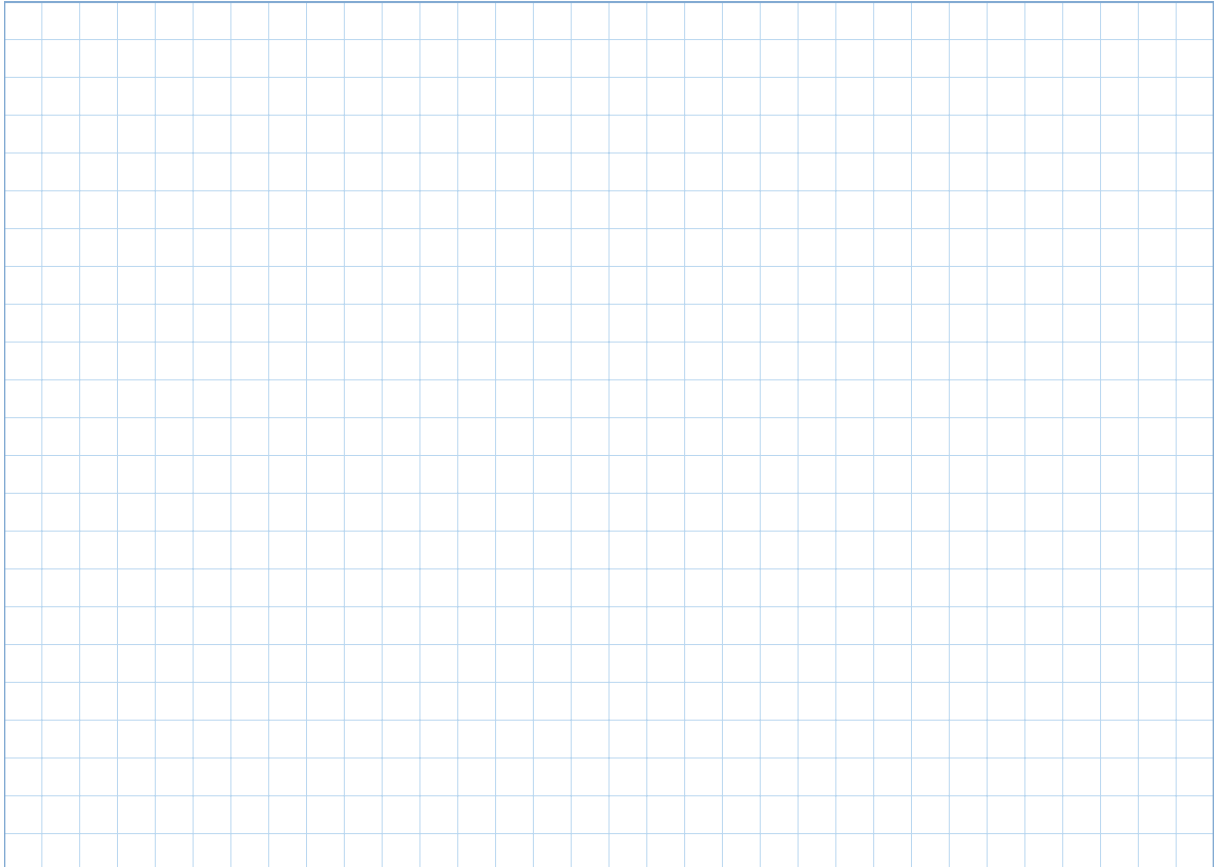


Aufgabe 2

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}.$$

Stelle das zugehörige Differentialgleichungssystem auf. Bestimme den Gleichgewichtspunkt und skizziere einige Feldlinien.



Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

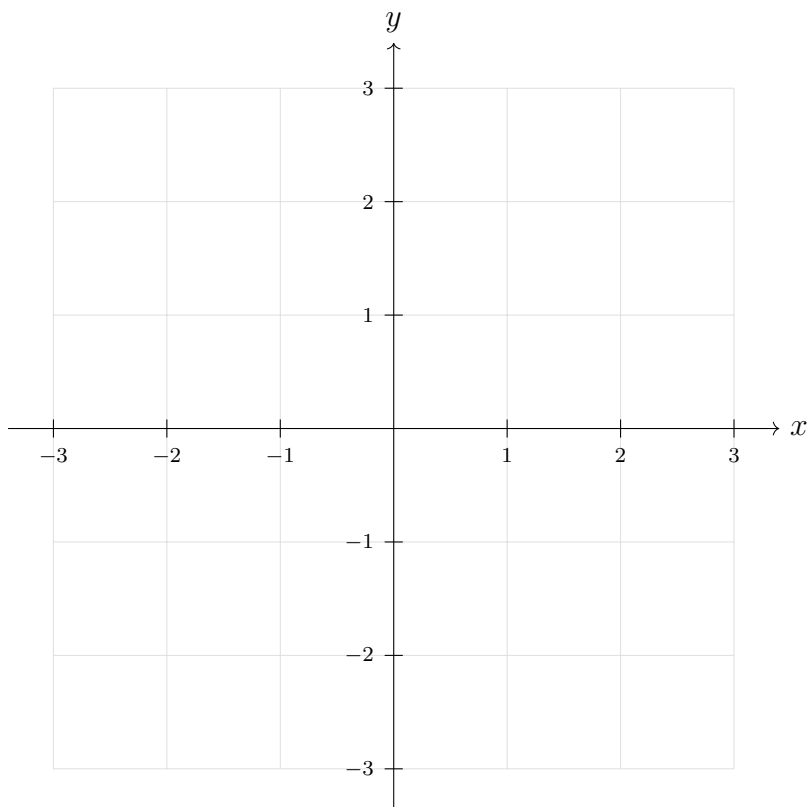
$$y' = xy.$$

1. Schreibe das zugehörige Richtungsfeld als Vektorfeld der Form

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

2. Bestimme die Kurven, auf denen die Lösungskurven horizontale Tangenten haben.
3. Untersuche das Vorzeichen von y' in den vier Quadranten.
4. Zeichne das Richtungsfeld qualitativ.

Zusatz, falls Zeit bleibt: Löse die ODE.



Aufgabe 4

Unten ist das Richtungsfeld der Differentialgleichung

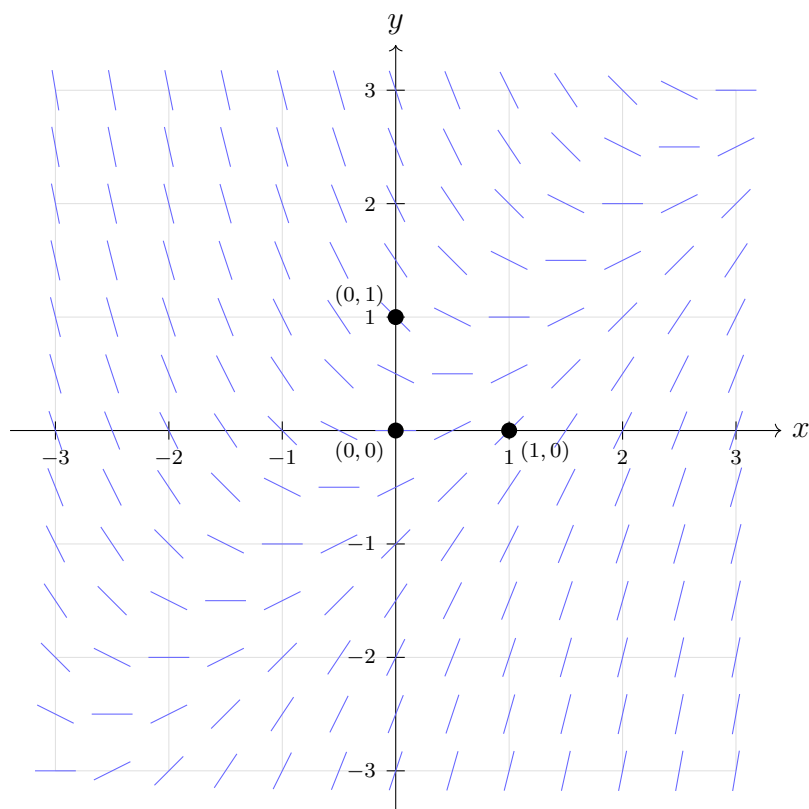
$$y' = x - y$$

gegeben.

Skizziere qualitativ die Lösungskurven durch die Punkte

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1).$$

Zusatz, falls Zeit bleibt: Löse die ODE.



3 Graphen von Funktionen $f(x, y)$ erkennen

In vielen Altprüfungen kamen oft Multiple-Choice-Aufgaben vor, bei denen eine visuelle Abbildung eines Funktionsgraphen $z = f(x, y)$ gegeben war. Man musste den Graphen dabei nicht selbst zeichnen, sondern erkennen, welche Funktion zu welchem Graphen passt. Dafür ist es wichtig, typische Eigenschaften einer Funktion schnell zu erkennen und damit falsche Antwortmöglichkeiten auszuschliessen.

Strategien zum Erkennen von Graphen

1. Beschränkt oder unbeschränkt?

Prüfe zuerst, ob die Funktion beschränkt ist.

Zum Beispiel ist

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

beschränkt, denn

$$-2 \leq \sin(x) + \cos(y) \leq 2.$$

Ein Graph, der deutlich über 2 oder unter -2 geht, kann also nicht zu dieser Funktion gehören.

Dagegen ist

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

unbeschränkt, da der Faktor $\sqrt{x^2 + y^2}$ nach aussen wächst. Die Schwingungen werden also weiter weg vom Ursprung grösser.

2. Hängt die Funktion von x , von y oder von beiden Variablen ab?

Wenn eine Funktion nur von x abhängt, zum Beispiel

$$f(x, y) = \sin(x),$$

dann ändert sich der Graph nur in x -Richtung. In y -Richtung bleibt er gleich.

Wenn eine Funktion nur von y abhängt, zum Beispiel

$$f(x, y) = y^2,$$

dann ändert sich der Graph nur in y -Richtung.

Wenn beide Variablen vorkommen, verändert sich der Graph meistens in beide Richtungen.

3. Schnitte mit $x = 0$ und $y = 0$ betrachten

Setze gedanklich $x = 0$ oder $y = 0$ ein. Dadurch erhält man einfache Schnittkurven.

Beispiel:

$$f(x, y) = x \cos(y).$$

Für $x = 0$ gilt

$$f(0, y) = 0.$$

Also liegt der Graph entlang der Linie $x = 0$ auf Höhe $z = 0$.

Für $y = 0$ gilt

$$f(x, 0) = x.$$

Also sieht man entlang der Linie $y = 0$ eine Gerade.

4. Nullstellen erkennen

Untersuche, wo

$$f(x, y) = 0$$

gilt.

Beispiel:

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y).$$

Dann gilt

$$f(x, y) = 0$$

falls

$$\sin(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(y) = 0.$$

Der Graph schneidet also entlang ganzer Linien die Ebene $z = 0$.

5. Periodizität und Wellenmuster erkennen

Trigonometrische Funktionen erzeugen oft Wellenmuster.

$$\sin(x) \Rightarrow \text{Wellen in } x\text{-Richtung,}$$

$$\cos(y) \Rightarrow \text{Wellen in } y\text{-Richtung.}$$

Bei Funktionen wie

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

entstehen Wellen in beide Richtungen.

Wenn zusätzlich ein Faktor wie x , y oder $\sqrt{x^2 + y^2}$ vorkommt, verändert sich die Amplitude.

6. Amplitude untersuchen

Bei Funktionen der Form

$$f(x, y) = x \cos(y)$$

ist $\cos(y)$ beschränkt, aber der Faktor x kann gross werden.

Deshalb entstehen Wellen in y -Richtung, deren Amplitude für grosse $|x|$ grösser wird.

7. Symmetrien prüfen

Prüfe, ob die Funktion gerade oder ungerade in einer Variablen ist.

Wenn

$$f(-x, y) = f(x, y),$$

dann ist die Funktion symmetrisch bezüglich der yz -Ebene.

Wenn

$$f(x, -y) = f(x, y),$$

dann ist die Funktion symmetrisch bezüglich der xz -Ebene.

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ist in beiden Variablen gerade. Der Graph ist eine symmetrische Schüssel.

8. Ist der Graph eine Ebene?

Lineare Funktionen der Form

$$f(x, y) = ax + by + c$$

haben als Graph eine Ebene.

Um verschiedene Ebenen zu unterscheiden, betrachtet man die Steigung in x - und y -Richtung.

Zum Beispiel hängt

$$f(x, y) = 2x$$

nur von x ab. Der Graph steigt also nur in x -Richtung und bleibt in y -Richtung konstant.

9. Verhalten weit weg vom Ursprung

Prüfe, was passiert, wenn $|x|$ oder $|y|$ gross wird.

Der Ausdruck

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

beschreibt den Abstand vom Ursprung und wächst nach aussen.

Der Ausdruck

$$e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

wird dagegen weit weg vom Ursprung sehr klein.

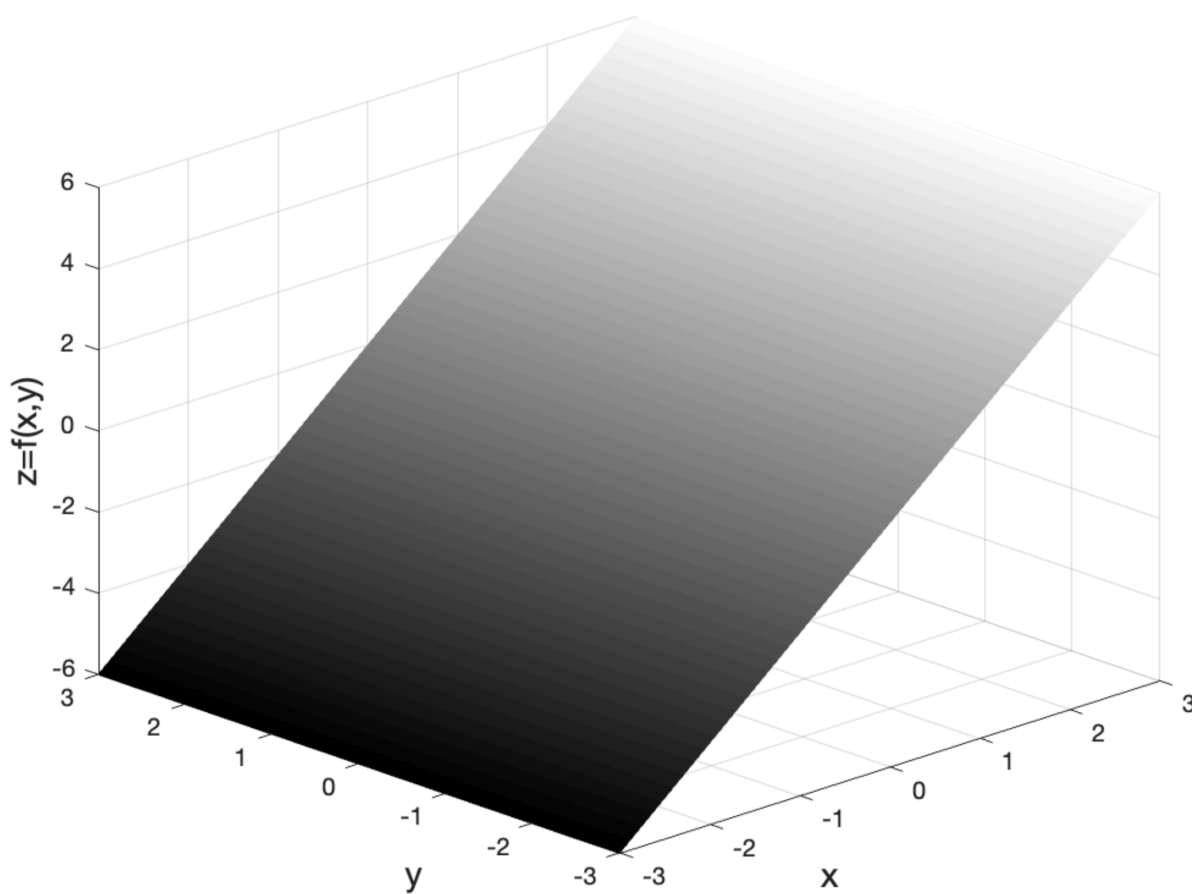
Checkliste für Multiple-Choice-Graphen

1. Ist der Graph beschränkt oder unbeschränkt?
2. Hängt die Funktion von x , von y oder von beiden Variablen ab?
3. Wie sehen die Schnitte bei $x = 0$ und $y = 0$ aus?
4. Wo sind die Nullstellen?
5. Gibt es Wellen oder Periodizität?
6. Wird die Amplitude grösser oder kleiner?
7. Gibt es Symmetrien?
8. Ist der Graph vielleicht eine Ebene?

Hinweis: Arbeite bei diesen Aufgaben unbedingt mit dem Ausschlussprinzip. Oft erkennt man die richtige Antwort nicht sofort, aber man kann viele Antwortmöglichkeiten schnell ausschliessen, z.B. weil die Funktion beschränkt ist, nur von einer Variablen abhängt oder eine andere Symmetrie besitzt.

Aufgabe 1

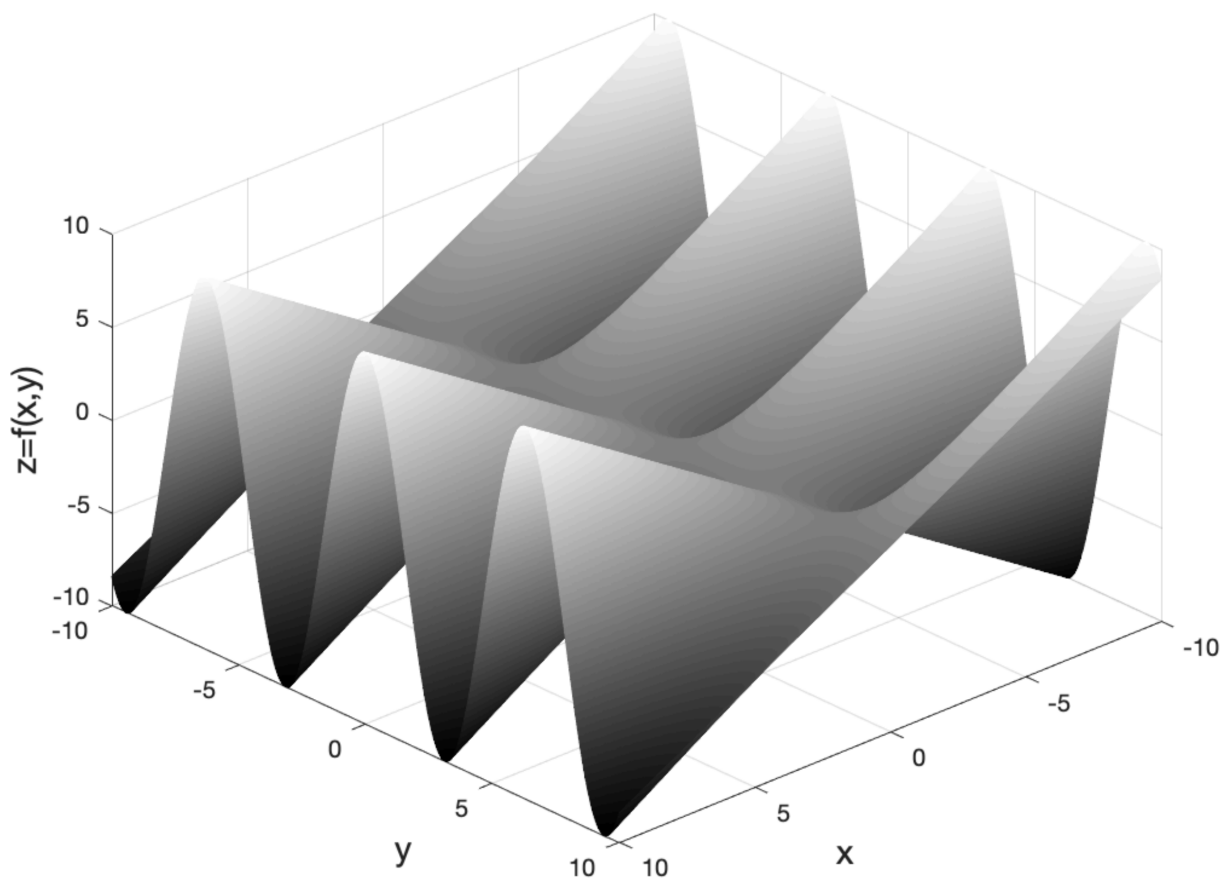
Zu welcher Funktion passt der gegebene Graph? Begründe kurz mit einer der Strategien aus der Checkliste.



- (a) $f(x, y) = 2x$
- (b) $f(x, y) = x$
- (c) $f(x, y) = 2x + y$
- (d) $f(x, y) = x + y$

Aufgabe 2

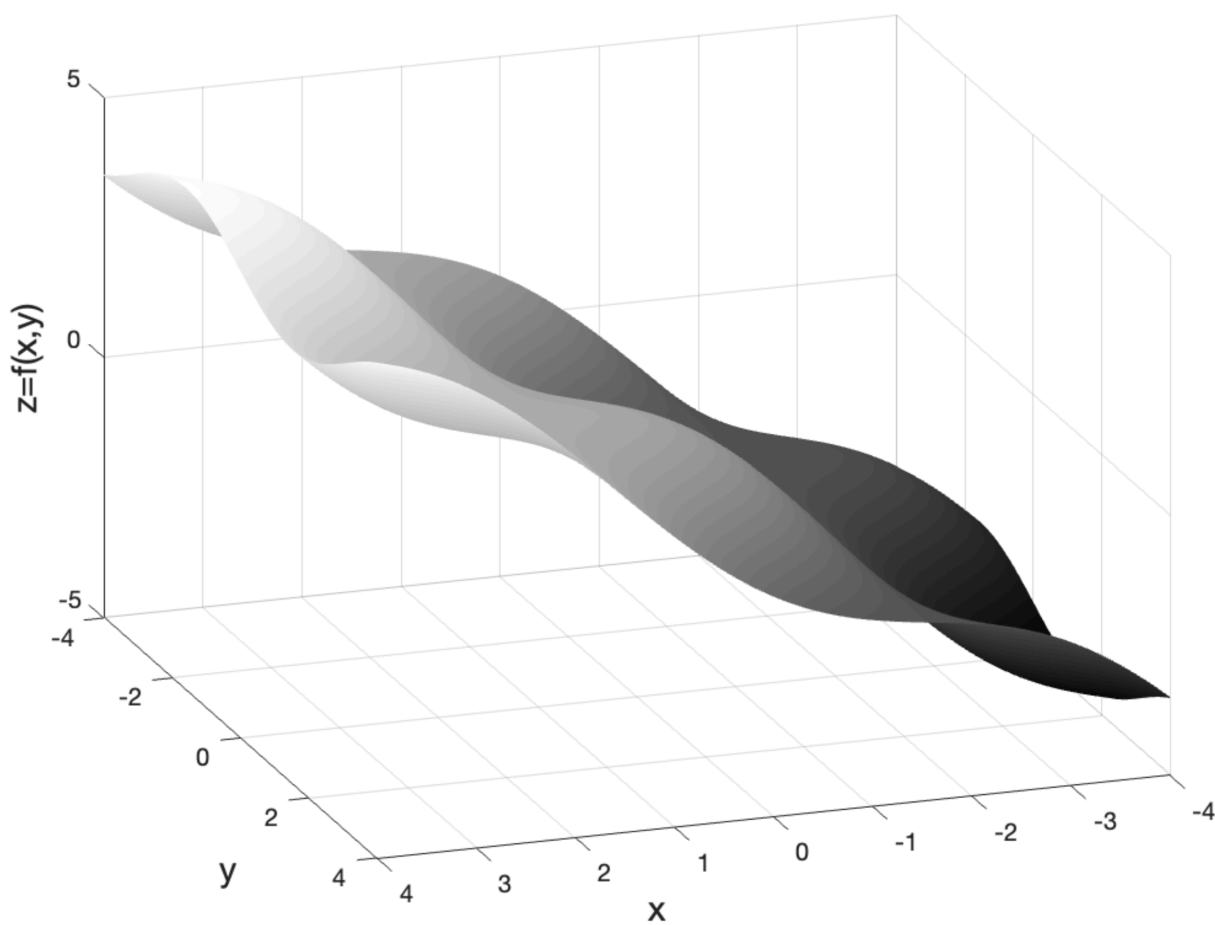
Zu welcher Funktion passt der gegebene Graph? Begründe kurz mit einer der Strategien aus der Checkliste.



- (a) $f(x, y) = x \cos(y)$
- (b) $f(x, y) = x + \sin(y)$
- (c) $f(x, y) = y \sin(x)$
- (d) $f(x, y) = y + \sin(x)$

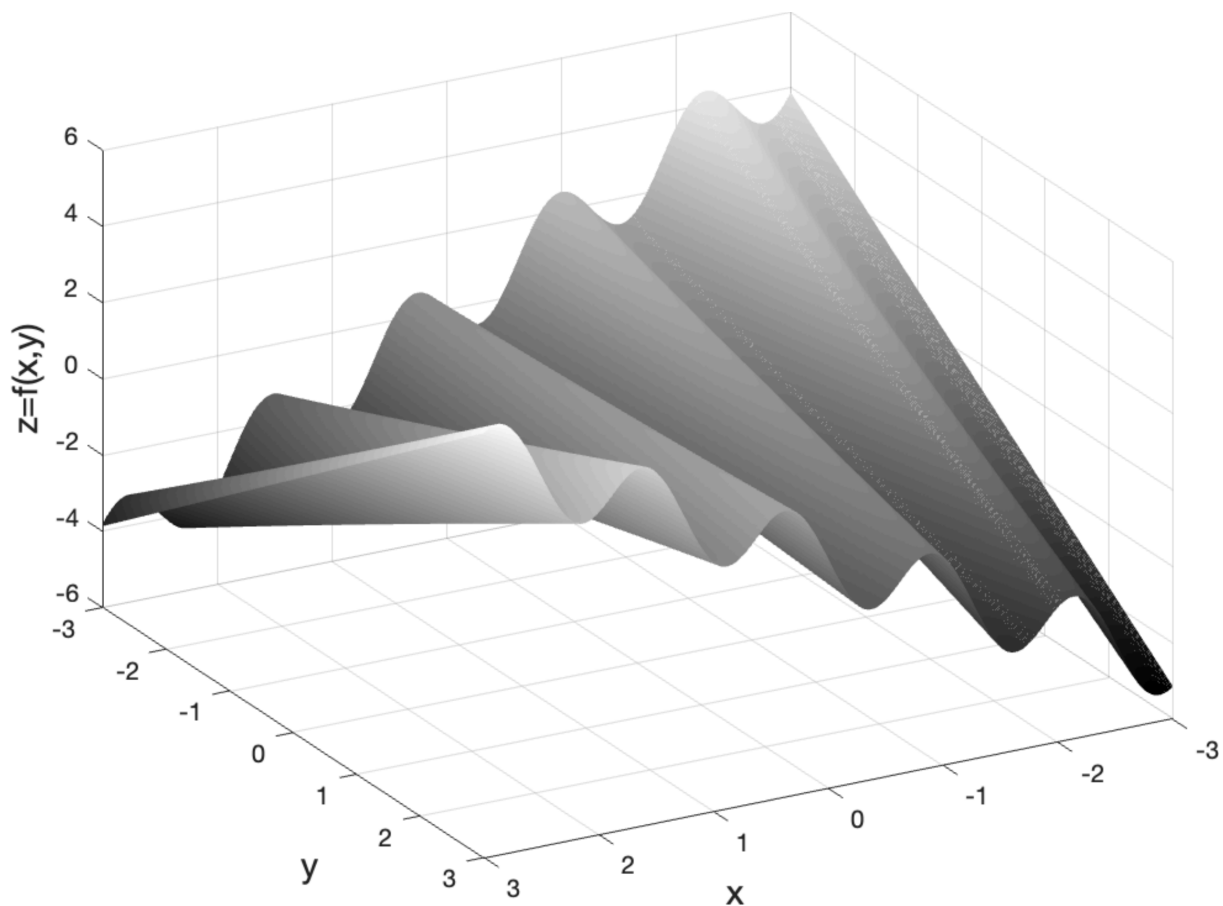
Aufgabe 3

Zu welcher Funktion passt der gegebene Graph? Begründe kurz mit einer der Strategien aus der Checkliste.



- (a) $f(x, y) = \cos(x) \cdot \sin(y) - x$
- (b) $f(x, y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + x$
- (c) $f(x, y) = \cos(y) \cdot \sin(x) + y$
- (d) $f(x, y) = \cos(y) \cdot \sin(x) - y$

Aufgabe 4 Zu welcher Funktion passt der gegebene Graph? Begründe kurz mit einer der Strategien aus der Checkliste.



(a) $f(x, y) = \sin(5x^2 + 5y^2)$

(b) $f(x, y) = \sin(5x) \cos(y)$

(c) $f(x, y) = \sin(5x) + \frac{1}{2}xy$

(d) $f(x, y) = \sin(5x)$