Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 5

Kritische Punkte & Klassifikation mit Hesse-Matrix

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 26.03.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Kritische Punkte
2. Klassifikation kritischer Punkte & Hesse-Matrix

1 Kritische Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Gradient

Der Gradient von f ist definiert als

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Der Gradient beschreibt die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion.

Kritische Punkte

Ein Punkt (x_0, y_0) heisst **kritischer Punkt**, wenn

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

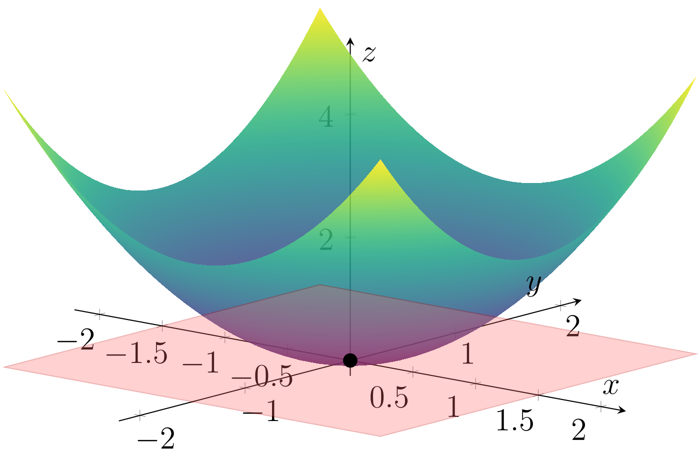
Dies ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$f_x(x,y) = 0, \quad f_y(x,y) = 0.$$

Vorgehen

Um kritische Punkte zu bestimmen:

1. Berechne die partiellen Ableitungen f_x und f_y.
2. Setze den Gradienten gleich Null: $\nabla f(x,y) = 0$.
3. Löse das entstehende Gleichungssystem, um die kritischen Punkte (x,y) zu erhalten.



Lokales Minimum bei $P = (0,0)$ *und* $\nabla f(0,0) = 0$

Übungsaufgaben: Kritische Punkte

Bestimme jeweils alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y$

2. $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 + 4y$

3. $f(x, y) = x^2 y - y$

4. $f(x, y) = e^{2x} + y^2 - 2y$

5. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2x + 6y^2$

6. $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$

2 Klassifikation kritischer Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und (x_0, y_0) ein kritischer Punkt, d.h.

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0.$$

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist die Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen von f. Sie beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion in der Umgebung eines Punktes.
Die Hesse-Matrix von f im Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Vereinfachte Notation

Schreibe

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad a = f_{xx}(x_0, y_0),\ b = f_{xy}(x_0, y_0),\ c = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Dann gilt für die Determinante

$$\det(H) = ac - b^2.$$

Klassifikation

Setze

$$D = \det(H) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - \big(f_{xy}(x_0, y_0)\big)^2.$$

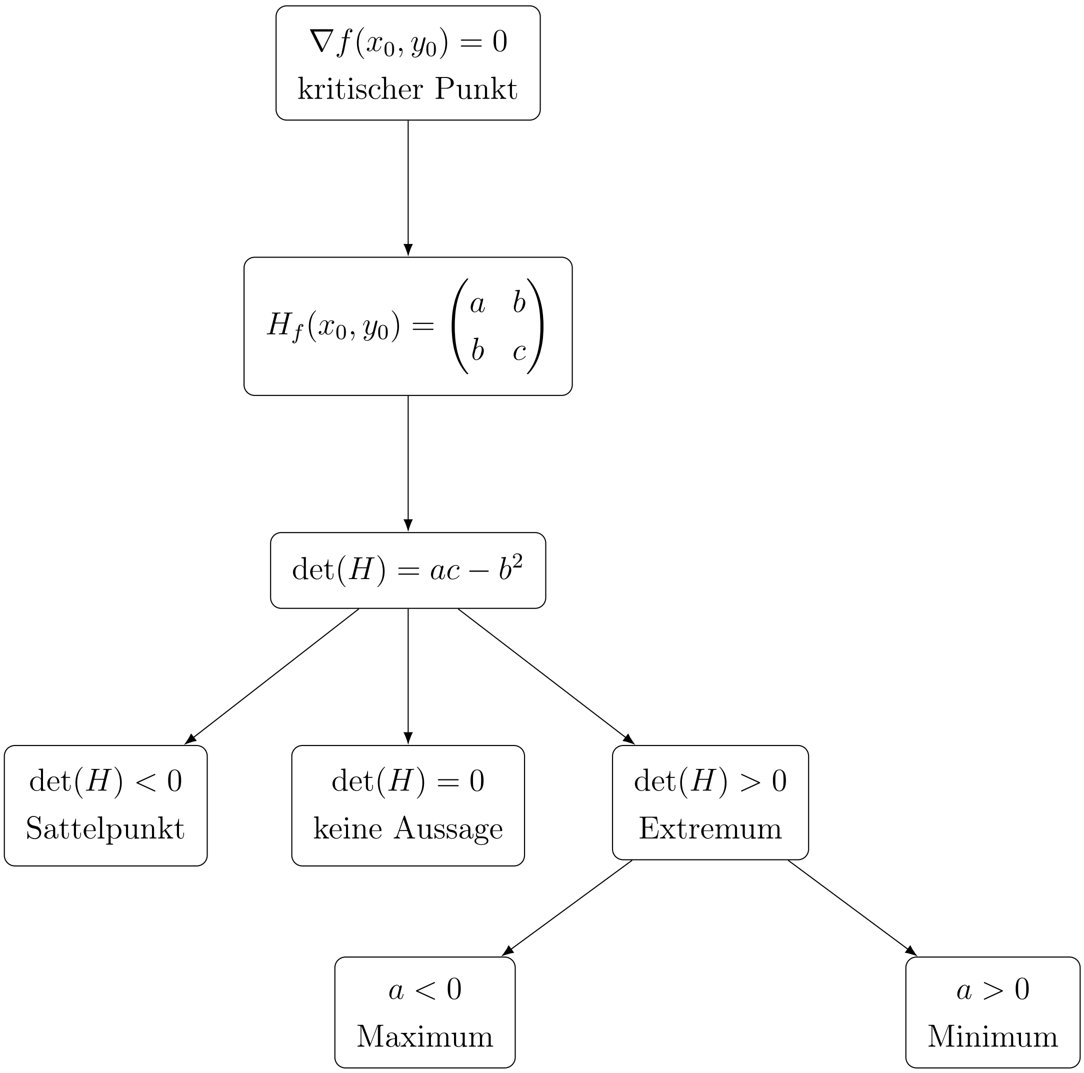
Dann gilt:

- $D > 0$ und $a > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum
- $D > 0$ und $a < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
- $D < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
- $D = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Vorgehen

1. Bestimme die kritischen Punkte $P(x_0, y_0)$ durch $\nabla f = 0$.
2. Berechne die zweiten partiellen Ableitungen.
3. Werte die Hesse-Matrix im Punkt (x_0, y_0) aus.
4. Berechne $D = \det(H_f(x_0, y_0))$.
5. Klassifiziere den Punkt.

Klassifikation kritischer Punkte als Flussdiagramm



Übungsaufgaben: Klassifikation kritischer Punkte

Klassifiziere die kritischen Punkte der folgenden Funktionen mithilfe der Hesse-Matrix.

Aufgabe 1 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y, \qquad P = (-1, 2)$

Aufgabe 2 $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 + 4y, \qquad P_1 = (1, -2),\ P_2 = (-1, -2)$

Aufgabe 3 $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2x + 6y^2, \qquad P = (-3, -1)$

Spezialaufgabe $f(x,y) = \cos(x) + \sin(y), \qquad P_{k,m} = \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right), \quad k, m \in \mathbb{Z}$

Klassifiziere die kritischen Punkte $P_{k,m}$ in Abhängigkeit von k und m. *Hinweis: Untersuche die Parität von k und m.*