
Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 3

Richtungsableitungen, Tangentialebene & totales Differential

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 12.03.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Richtungsableitung
2. Tangentialebene
3. Linearisierung & totales Differential

1 Richtungsableitung

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $P = (x_0, y_0)$ ein Punkt. Während die partiellen Ableitungen die Änderung in x - bzw. y -Richtung messen, beschreibt die Richtungsableitung die Änderung von f in *beliebiger Richtung*.

Definition. Sei \vec{r} ein Richtungsvektor. Zuerst bestimmen wir den normierten Richtungsvektor

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Dann ist die Richtungsableitung von f im Punkt P definiert durch

$$D_{\vec{u}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}.$$

Dabei gilt

$$P + h\vec{u} = (x_0, y_0) + h(u_1, u_2) = (x_0 + hu_1, y_0 + hu_2)$$

Zusammenhang mit dem Gradienten.

Ist f differenzierbar, so gilt

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet \cdot das Skalarprodukt der beiden Vektoren, also

$$\nabla f(P) \cdot \vec{u} = f_x(P) u_1 + f_y(P) u_2$$

Geometrische Bedeutung. Die Richtungsableitung misst die Änderungsrate von f , wenn man sich vom Punkt P in Richtung des Vektors \vec{u} bewegt.

Die Richtungsableitung ist also das Skalarprodukt des Gradienten mit dem normierten Richtungsvektor.

Vorgehen zur Berechnung der Richtungsableitung

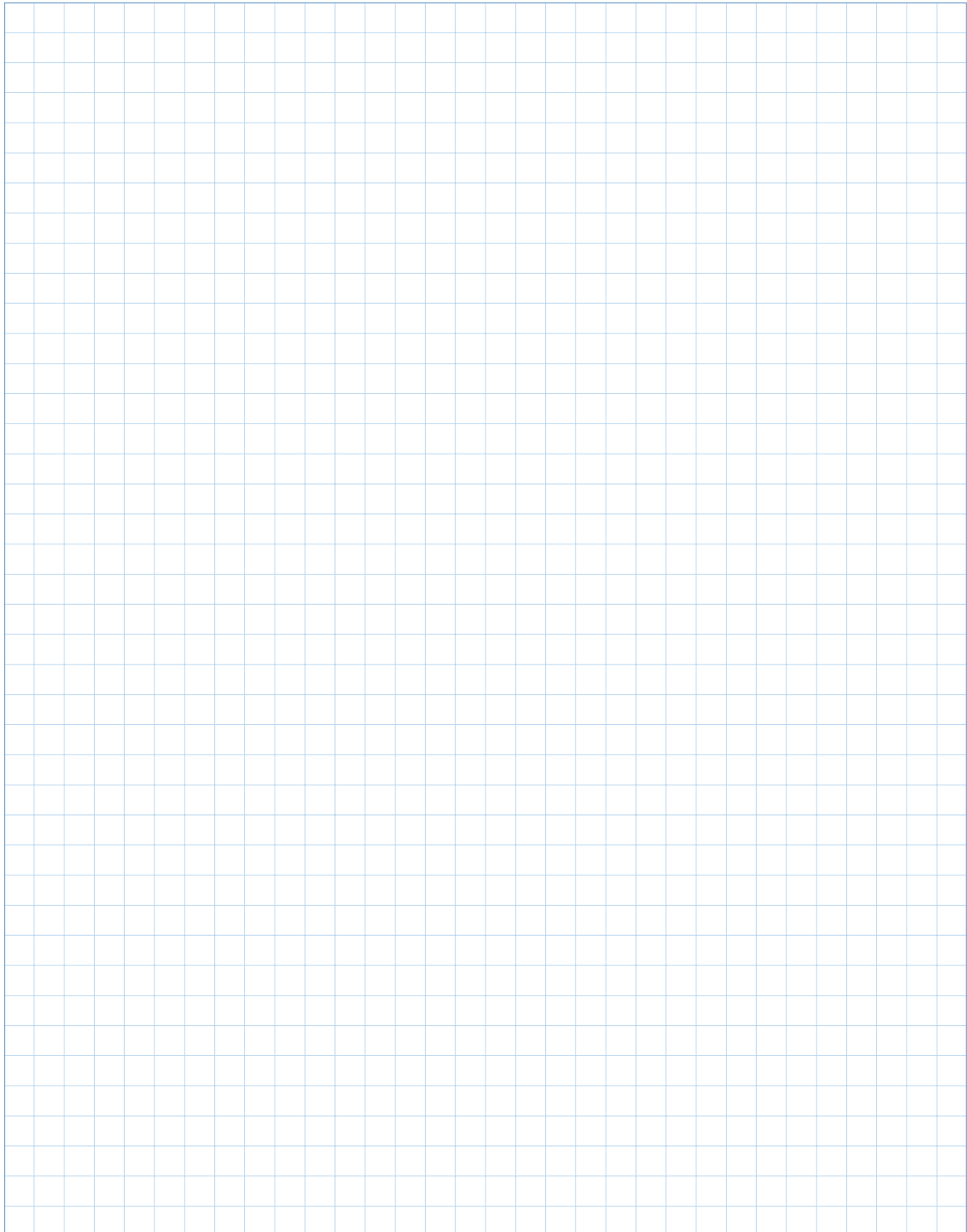
1. Gradient berechnen $\nabla f(x, y)$
2. Im Punkt auswerten $\nabla f(P)$
3. Richtungsvektor normieren $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
4. Skalarprodukt berechnen $D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Übungsaufgabe: Richtungsableitung

Gegeben seien

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^2, \quad \vec{r} = (3, -4), \quad P = (1, 2)$$

Bestimme die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung von \vec{r} .



2 Tangentialebene

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (x_0, y_0) ein Punkt im Definitionsbereich von f .

Definition. Die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist gegeben durch

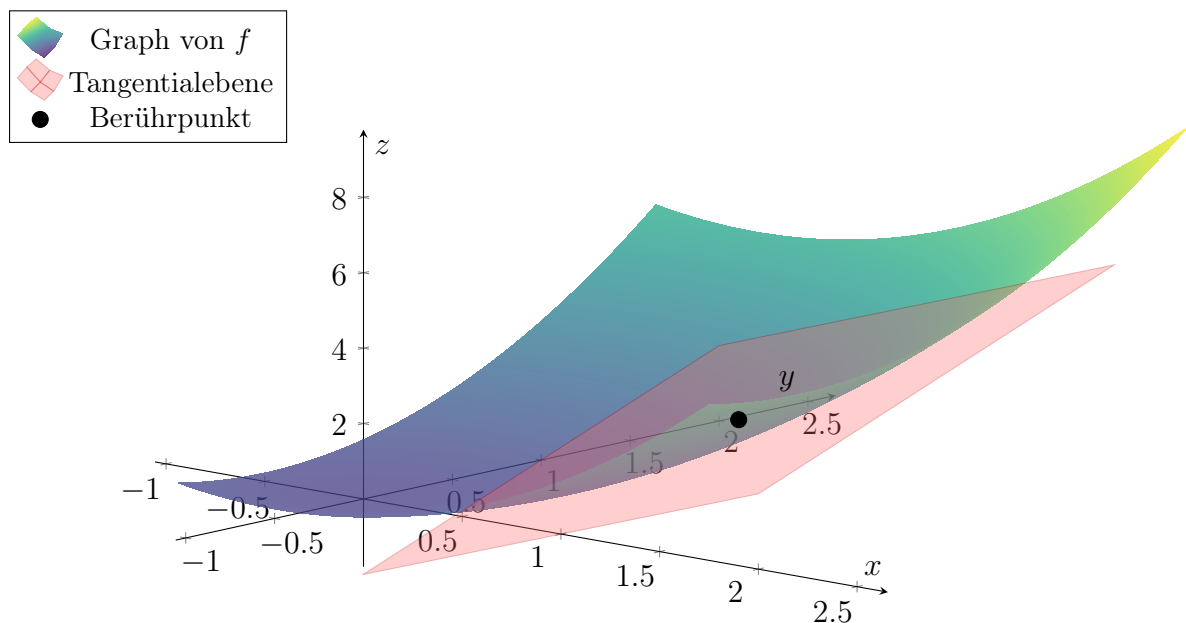
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Interpretation. Die Tangentialebene beschreibt die beste lineare Approximation der Funktion f in der Nähe des Punktes (x_0, y_0) . Sie ist die Verallgemeinerung der Tangente für Funktionen mehrerer Variablen.

Vorgehen zur Bestimmung einer Tangentialebene

1. Partielle Ableitungen f_x und f_y berechnen.
2. Funktionswert $f(x_0, y_0)$ bestimmen.
3. Ableitungen im Punkt einsetzen: $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$
4. In die Tangentialebenenformel einsetzen.

Tangentialebene an $f(x, y) = x^2 + y^2$ im Punkt $(1, 1, 2)$



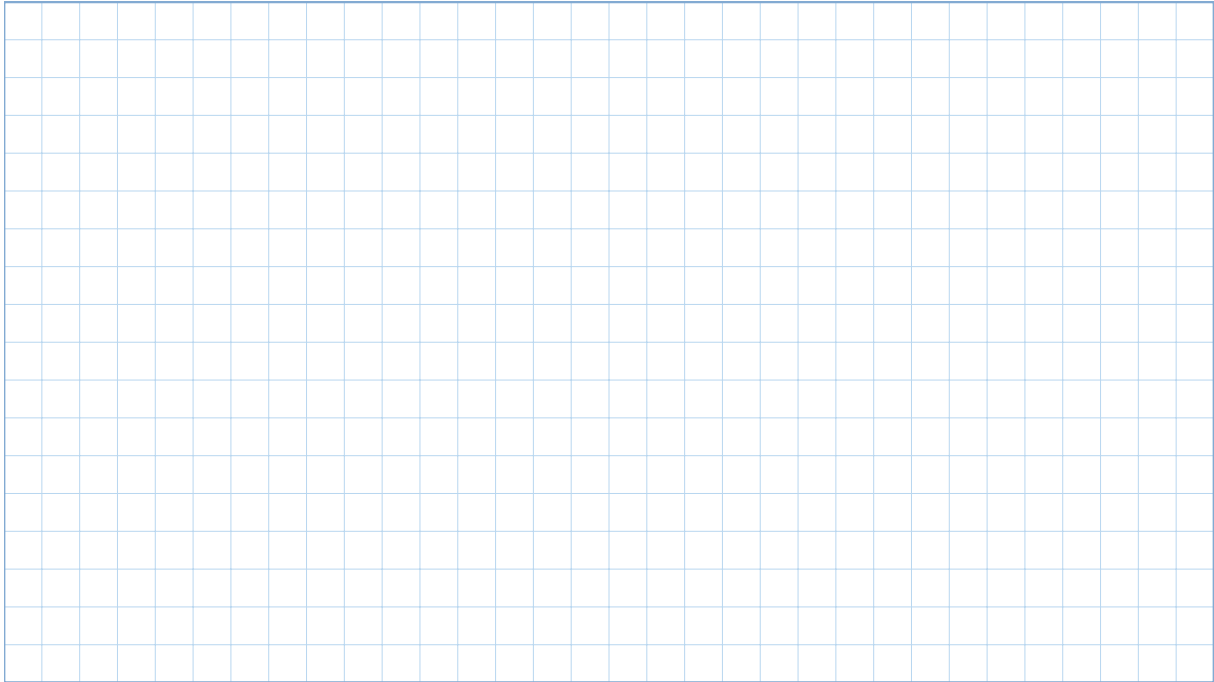
Übungsaufgaben: Tangentialebene

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2y + y^2$$

Bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(3, 4)$.

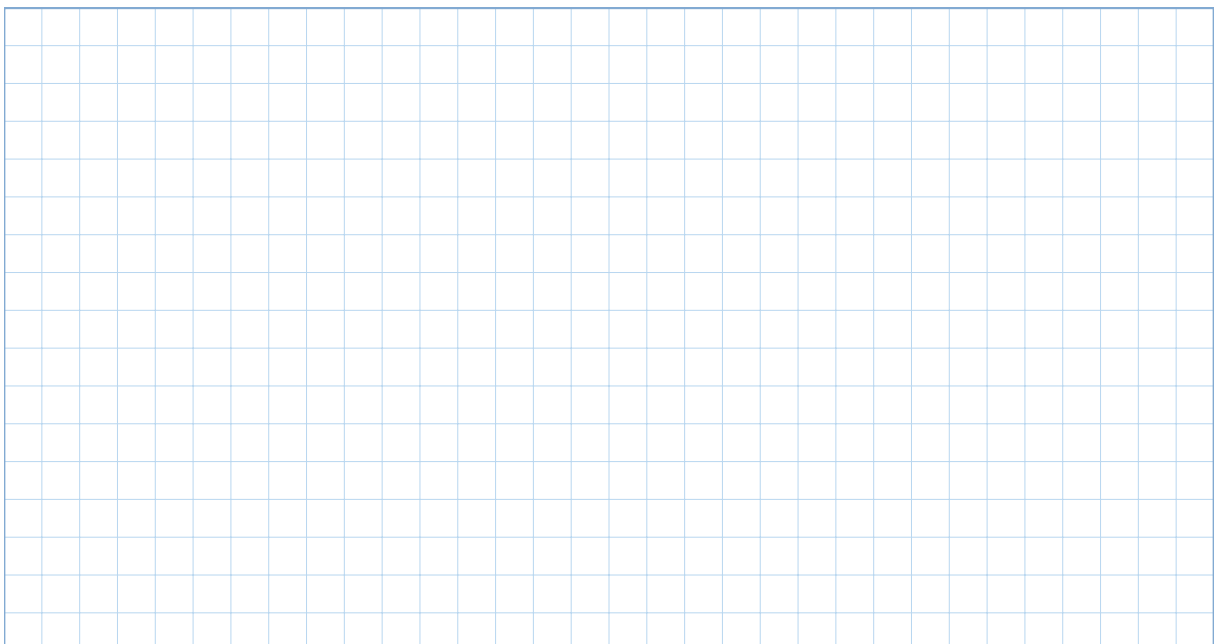


Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, 1)$.



3 Linearisierung und totales Differential

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und (x_0, y_0) ein Punkt.

Linearisierung. In der Nähe des Punktes (x_0, y_0) kann die Funktion f durch eine lineare Funktion approximiert werden. Diese sogenannte Linearisierung ist gegeben durch

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Diese Funktion entspricht genau der Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Für Punkte (x, y) nahe bei (x_0, y_0) gilt daher näherungsweise

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

Totales Differential. Setzt man

$$dx = x - x_0, \quad dy = y - y_0,$$

so kann die approximative Änderung der Funktion geschrieben werden als

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

Das totale Differential df beschreibt die approximative Änderung der Funktion f am Punkt (x_0, y_0) , wenn sich x um dx und y um dy ändern.

Notation für kleine Änderungen. Oft schreibt man für die tatsächliche Änderung einer Variablen

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

Für kleine Änderungen gilt näherungsweise

$$\Delta f \approx df$$

Das totale Differential liefert also eine lineare Approximation der tatsächlichen Funktionsänderung.

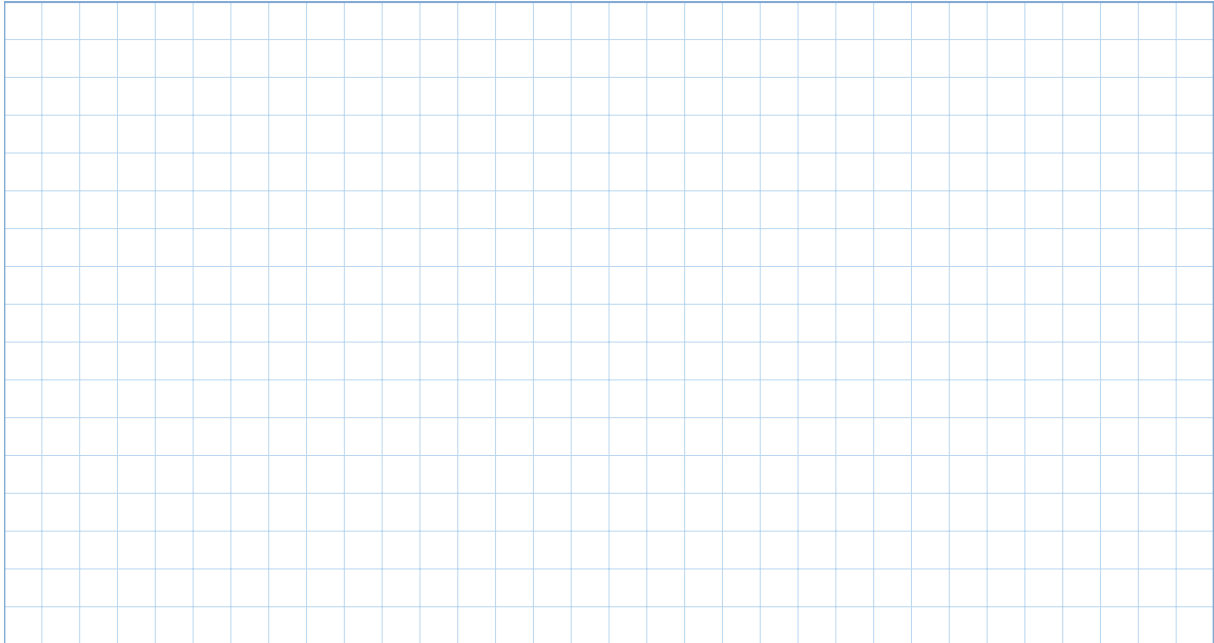
Übungsaufgaben: Totales Differential

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x - y}$$

Bestimme das totale Differential df im Punkt $(3, 1)$.

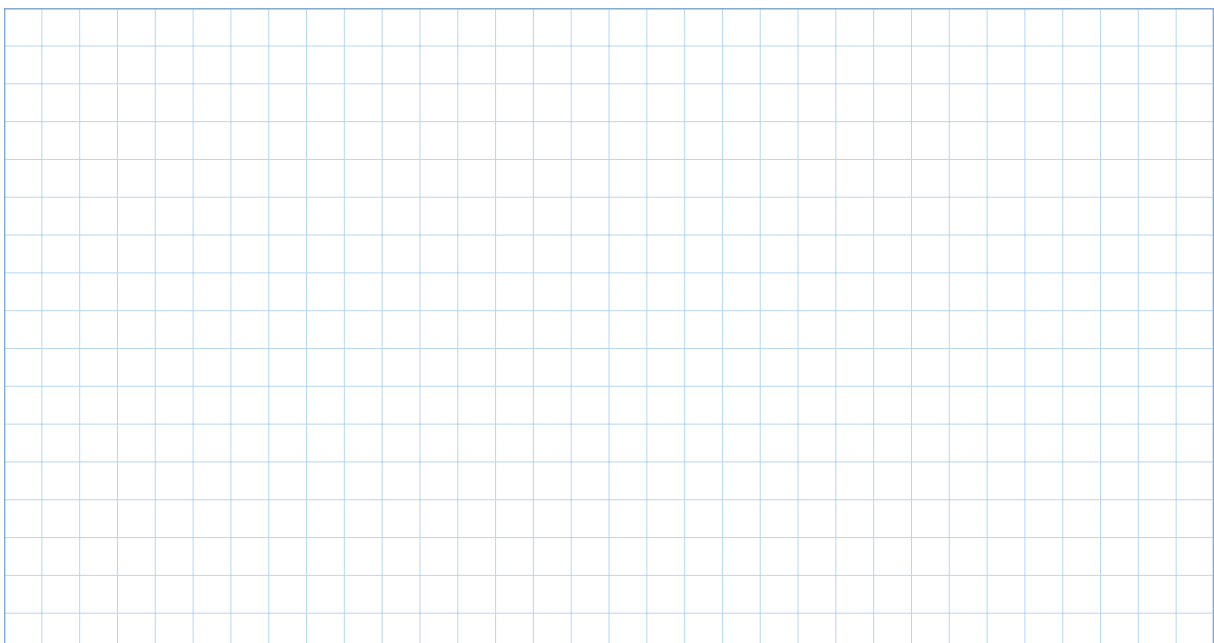


Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x}{y}\right)$$

Bestimme das totale Differential df im Punkt $(1, 1)$.



Aufgabe 3 (Thermodynamik)

Die ideale Gasgleichung lautet

$$PV = nRT,$$

wobei P der Druck, V das Volumen, T die Temperatur und n, R Konstanten sind.

1. Drücke den Druck P als Funktion von T und V aus.
2. Bestimme das totale Differential dP .
3. Verwende das totale Differential, um eine lineare Näherung für die Druckänderung $\Delta P = P - P_0$ zu bestimmen, wenn sich die Temperatur um $\Delta T = T - T_0$ und das Volumen um $\Delta V = V - V_0$ ändern.

