Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 1

Repetition Gewöhnliche Differentialgleichungen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 26.02.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Organisatorisches
2. Einleitung
3. Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODEs)
4. Inhomogene ODEs erster Ordnung: Variation der Konstanten
5. ODEs erster Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution
6. Inhomogene ODEs höherer Ordnung: Euler-Ansatz & Partikuläransatz

1 Organisatorisches

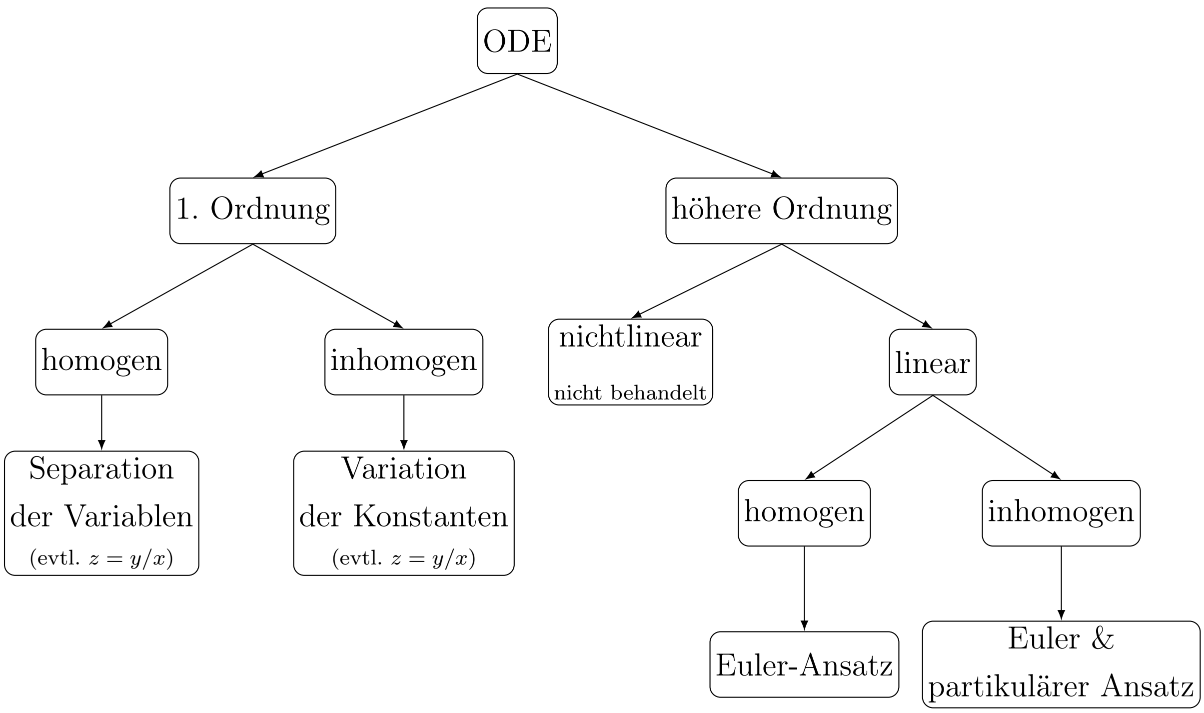
- Übungsstunde: Donnerstag 9:45 – 10:30 & 10:45 – 11:30, HIT K51
- Serienabgabe: Freitag 18:00, via Moodle
- Eine Aufgabe kann mit einem Stern markiert werden (besonders genaue Korrektur)
- Bei Fragen: E-Mail an vloganathan@student.ethz.ch
- Jahresprüfung im Sommer: Analysis A & B
- Hilfsmittel bei der Prüfung: 20 beschriftete A4-Seiten an Prüfung erlaubt & herkömmliche Formelsammlung
- Materialien: Siehe Link (oben)

2 Einleitung

Herzlich willkommen zu **Analysis B**!
In Analysis A haben wir uns mit der Analysis einer einzelnen Variablen beschäftigt. Wir haben Grenzwerte, Ableitungen, Integrale und gewöhnliche Differentialgleichungen in einer Dimension studiert. In Analysis B erweitern wir diese Konzepte auf die Analysis mit mehreren Variablen. Wir beschäftigen uns unter anderem mit partiellen Ableitungen, Gradienten, Richtungsableitungen, Tangentialebenen, mehrdimensionalen Taylorentwicklungen und der Hesse-Matrix. Zudem vertiefen wir unser Verständnis gewöhnlicher Differentialgleichungen und untersuchen insbesondere auch Systeme von Differentialgleichungen sowie deren qualitatives Verhalten.
Gemeinsam bilden Analysis A und Analysis B die Grundlage der klassischen Analysis. Dieses Fundament ist für viele weitere mathematische Vorlesungen zentral und spielt auch in Physik, Chemie, Biologie, Informatik und den Ingenieurwissenschaften eine sehr wichtige Rolle.

3 Klassifikation von ODEs

Lösungsverfahren anhand Typ der ODE



Der obige Baum zeigt, wie wir gewöhnliche Differentialgleichungen (ODEs) einteilen. Anhand dieser Einteilung können wir jeweils ablesen, mit welchem Verfahren eine gegebene ODE in dieser Vorlesung gelöst wird (zum Beispiel Separation der Variablen, Variation der Konstanten oder Euler-Ansatz mit partikulärem Ansatz).

4 Variation der Konstanten

Populationsdynamik mit Migration: Wir betrachten eine Population mit Grösse $N(t)$ zum Zeitpunkt t.

- $N(t)$ bezeichnet die Anzahl Individuen der Population zur Zeit t,
- $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die konstante Wachstumsrate der Population,
- $q \in \mathbb{R}$ ist die konstante Nettomigrationsrate (Zuwanderung minus Abwanderung pro Zeiteinheit).

Die zeitliche Entwicklung der Population wird durch die folgende inhomogene ODE erster Ordnung beschrieben:

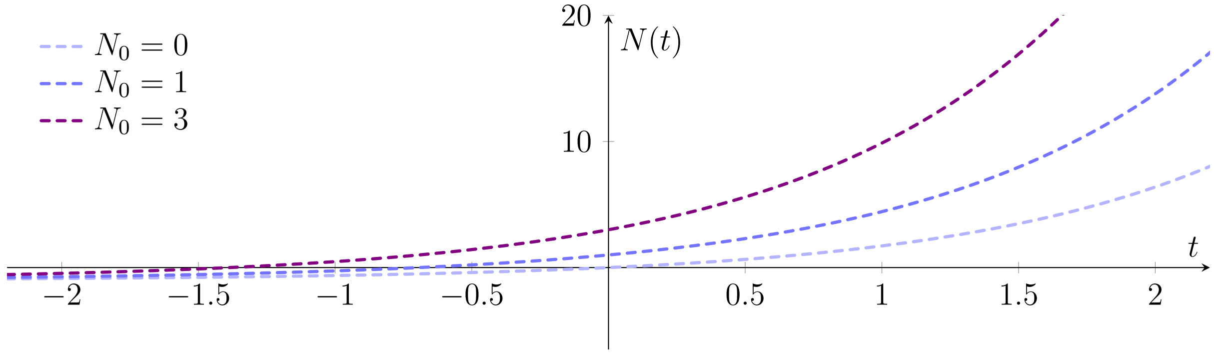
$$\frac{dN}{dt} = rN + q$$

Zusätzlich sei folgende Anfangsbedingung gegeben, wobei $N_0 > 0$ die anfängliche Populationsgrösse bezeichnet:

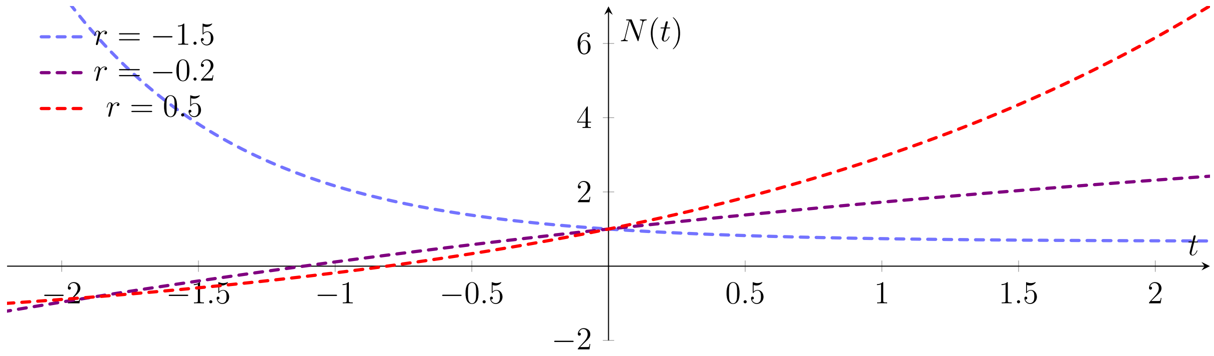
$$N(0) = N_0$$

Aufgabe: Bestimme die Lösung $N(t)$ der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $N(0) = N_0$.
Zusatz: Interpretiere $N(t)$ und erläutere die Bedeutung der Parameter N_0, r und q/r für die Dynamik des Systems.
Hinweis: Homogenisieren der ODE & Separation der Variablen, anschliessend Variation der Konstanten.

Variation von N_0 (fix: $r = 1,\ q = 1$)



Variation von r (fix: $N_0 = 1,\ q = 1$)



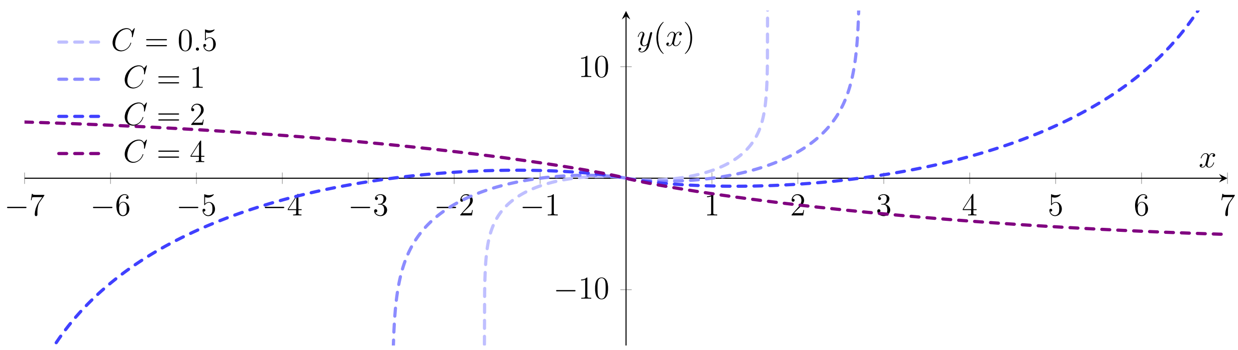
5 z-Substitution

Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden ODE 1. Ordnung:

$$y'(x) = e^{\left(y(x)/x\right)} + \frac{y(x)}{x}, \qquad x \neq 0,$$

Hinweis: Verwende z-Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

Variation von C in $y(x) = -x\ln(C - \ln|x|)$



6 Euler- und Partikuläransatz

Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

Hinweis: Löse zuerst die zugehörige homogene Gleichung mittels Euleransatz $y = e^{\lambda x}$. Bestimme anschliessend eine Partikulärlösung für die Störfunktion e^x mit einem geeigneten Ansatz. Anschliessend bestimme die Koeffizienten durch die Anfangswertbedingungen.