Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 12

Repetition & Prüfungsvorbereitung

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 28.05.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Differentialgleichungen erster Ordnung
2. Differentialgleichungen höherer Ordnung
3. Integration in Polarkoordinaten
4. Prüfungsstrategie für offene Aufgaben

Aufgabe 1: Differentialgleichung erster Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = e^y(x^2+1).$$

(a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Löse das Anfangswertproblem $\begin{cases} y'(x) = e^y(x^2+1), \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = e^y(x^2+1) \quad / \cdot e^{-y} / \cdot dx / \int$$

$$\int e^{-y} dy = \int x^2 + 1 \, dx$$

$$-e^{-y} = \frac{x^3}{3} + x + C \quad / \cdot (-1)$$

$$e^{-y} = C - \frac{x^3}{3} - x \quad / \ln$$

$$-y = \ln\left(C - \frac{x^3}{3} - x\right) \quad / \cdot (-1)$$

$$y(x) = -\ln\left(C - \frac{x^3}{3} - x\right)$$

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{C - x^3/3 - x}\right)$$

mit $C - \frac{x^3}{3} - x > 0$

$$y(1) = 0$$

$$0 = -\ln\left(C - \frac{1^3}{3} - 1\right) \quad / \cdot (-1)$$

$$0 = \ln\left(C - \frac{1}{3} - 1\right) \quad / e^\wedge$$

$$e^0 = C - \frac{4}{3}$$

$$1 = C - \frac{4}{3} \quad / + \frac{4}{3}$$

$$C = \frac{7}{3}$$

$$y(x) = -\ln\left(\frac{7}{3} - \frac{x^3}{3} - x\right)$$

Aufgabe 2: Variation der Konstanten

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{y}{x}, \qquad x > 0.$$

(a) Bestimme mit Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

(b) Löse das Anfangswertproblem $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 - \dfrac{y}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Variation der Konstanten

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{y}{x} \qquad /+\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

Homogenisieren

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \qquad /-\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad /\cdot\frac{1}{y} \quad /\cdot dx \quad /\int$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C \qquad /e^{\wedge}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{C-\ln|x|}$$

$$y = e^C \cdot e^{\ln|x^{-1}|}$$

$$y = K \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_{hom}(x) = K(x) \cdot \frac{1}{x}$$

Produktregel: $u = K(x)$, $u' = K'(x)$ | $v = \frac{1}{x}$, $v' = -\frac{1}{x^2}$

$$y'_{hom}(x) = K'(x)\cdot\frac{1}{x} - K(x)\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$y' = x^2 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = x^2 - \frac{K(x)/x}{x}$$

$$\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = x^2 - \frac{K(x)}{x^2} \qquad /+\frac{K(x)}{x^2}$$

$$\frac{K'(x)}{x} = x^2 \qquad /\cdot x$$

$$K'(x) = x^3 \qquad /\int dx$$

$$K(x) = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$y(x) = K(x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$y(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

$$y(1) = 0$$

$$0 = \frac{1^3}{4} + \frac{C}{1}$$

$$0 = \frac{1}{4} + C \qquad /-\frac{1}{4}$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

$$y(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{1/4}{x}$$

$$y(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4x}$$

Aufgabe 3: Inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung

Löse das folgende Anfangswertproblem: $\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 3x + 1, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

$$y'' - 4y' + 4y = 3x + 1$$

homogenisieren

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Euler Ansatz

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2$: Doppelte NST.

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

Partikuläre Lösung : $S(x) = 3x + 1$

(Störfkt. ist Polynom 1. Grades)

$$y_p(x) = Ax + B$$

$$y_p'(x) = A$$

$$y_p''(x) = 0$$

$$y'' - 4y' + 4y = 3x + 1$$

$$0 - 4A + 4(Ax + B) = 3x + 1$$

$$4B - 4A + 4Ax = 1 + 3x$$

x^1: $4A = 3 \longrightarrow A = \frac{3}{4}$

x^0: $4B - 4A = 1$

$4B - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1$

$4B - 3 = 1 \longrightarrow B = 1$

$$y_p(x) = Ax + B$$

$$y_p(x) = \frac{3}{4}x + 1$$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{3}{4}x + 1$$

Produktregel

$u = C_1 + C_2 x$ | $v = e^{2x}$

$u' = C_2$ | $v' = 2e^{2x}$

$$y'(x) = (2C_1 + C_2(2x + 1)) e^{2x} + \frac{3}{4}$$

Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1$$

$$1 = (C_1 + C_2 \cdot 0) e^0 + \frac{3}{4} \cdot 0 + 1 \quad / -1$$

$$0 = C_1$$

$$y'(0) = 0$$

$$0 = (2\cancel{C_1}^{C_1 = 0} + C_2(2 \cdot 0 + 1)) e^0 + \frac{3}{4}$$

$$0 = C_2 + \frac{3}{4} \quad / -\frac{3}{4}$$

$$C_2 = -\frac{3}{4}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{3}{4}x + 1$$

$$y(x) = -\frac{3}{4} e^{2x} + \frac{3}{4}x + 1$$

$$y(x) = \frac{3}{4}(x - e^{2x}) + 1$$

Aufgabe 4: Das Gauss-Integral

Sei $a > 0$. Wir betrachten das Integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx.$$

Dieses Integral lässt sich nicht direkt mit einer elementaren Stammfunktion berechnen. Der Trick besteht darin, zunächst $I(a)^2$ zu betrachten.

(a) Zeige, dass gilt

$$I(a)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

(b) Berechne dieses Doppelintegral mit Polarkoordinaten.

(c) Folgere daraus den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx.$$

(d) Bestimme als Spezialfall den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

a)

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx$$

$$I(a)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx}$$

diese Variable kann man auch einfach y nennen

$$I(a)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\, dy$$

$$I(a)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2}\, dx\, dy$$

$$I(a)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

b)

Integral läuft über ganz $\mathbb{R}^2$. In Polarkoordinaten gilt $0 \le r < \infty$ und $0 \le \varphi < 2\pi$.

$$I(a)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$I(a)^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ar^2}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$I(a)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} r\, e^{-ar^2}\, dr \quad \Big\}\ \text{Substitution} \quad \begin{cases} u = ar^2 \\ \frac{du}{dr} = 2ar \quad /\cdot dr /\cdot \frac{1}{2ar} \\ dr = \frac{1}{2ar}\,du \end{cases}$$

$$I(a)^2 = 2\pi \cdot \int_{u(0)=0}^{u(\infty)=\infty} \cancel{r}\, e^{-u}\, \frac{1}{2a\cancel{r}}\,du$$

$$I(a)^2 = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}a} \cdot \int_0^{\infty} e^{-u}\,du$$

$$I(a)^2 = \frac{\pi}{a} \cdot \left(-\left[e^{-u}\right]_0^{\infty}\right)$$

$$I(a)^2 = -\frac{\pi}{a}\left(\underbrace{{}^{\shortparallel}e^{-\infty}{}^{\shortparallel}}_{0} - \underbrace{e^0}_{1}\right)$$

$$I(a)^2 = -\frac{\pi}{a}\,(0-1)$$

$$\underline{\underline{I(a)^2 = \frac{\pi}{a}}}$$

c)

$$I(a)^2 = \frac{\pi}{a} \quad /\sqrt{}$$

$$\underline{\underline{I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}}$$

Formel: Gauss-Integral

d) Spezialfall $a = 1$

$$\underline{\underline{I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}}$$

Prüfungsstrategie für offene Aufgaben

- Zuerst den Aufgabentyp erkennen und die passende Methode wählen.
- Bei Differentialgleichungen: zuerst die allgemeine Lösung bestimmen, danach Anfangs- oder Randbedingungen einsetzen.
- Falls eine Teilaufgabe nicht gelingt: trotzdem weiterlesen. Oft wird in der nächsten Teilaufgabe ein Ersatzresultat angegeben, mit dem man weiterrechnen darf.
- Bei Doppelintegralen: zuerst das Gebiet verstehen und wenn möglich kurz skizzieren.
- Bei Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad dA = r\,dr\,d\varphi.$$

- Rechenweg sauber aufschreiben: Auch ein richtiger Ansatz oder eine passende Methode kann Punkte geben. Bei Differentialgleichungen sind dies z.B. Separation der Variablen, Variation der Konstanten oder Euler-Ansatz.

Viel Erfolg bei der Prüfungsvorbereitung
und bei den kommenden Prüfungen!