

---

# Mathematik II: Analysis B

---

## Übungsstunde 10

*Systeme von Differentialgleichungen*

Visva Loganathan | [vloganathan@student.ethz.ch](mailto:vloganathan@student.ethz.ch) | 07.05.2026

*Material:* [visva-loganathan.ch](http://visva-loganathan.ch)

## Überblick dieser Übungsstunde

1. Systeme von Differentialgleichungen
2. Entkoppelte und teilweise entkoppelte Systeme
3. Gekoppelte Systeme

# 1 Systeme von Differentialgleichungen

Bisher haben wir meistens einzelne Differentialgleichungen betrachtet, bei denen eine unbekannte Funktion gesucht ist. Bei einem System von Differentialgleichungen sucht man mehrere unbekannte Funktionen gleichzeitig.

Ein einfaches System für zwei unbekannte Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  hat zum Beispiel die Form

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)), \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)). \end{cases}$$

Dabei beschreibt die erste Gleichung die Änderungsrate von  $x(t)$ , und die zweite Gleichung beschreibt die Änderungsrate von  $y(t)$ .

Die Gleichungen können voneinander abhängen. Das bedeutet zum Beispiel, dass die Änderung von  $x(t)$  nicht nur von  $x(t)$ , sondern auch von  $y(t)$  abhängt. In diesem Fall spricht man von einem gekoppelten System.

## Lineare Systeme

Ein besonders wichtiger Spezialfall sind lineare Systeme. Bei einem linearen System kommen die unbekannt Funktionen nur linear vor. Ein Beispiel mit konstanten Koeffizienten ist

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  Konstanten sind.

## Anfangsbedingungen

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen benötigt man häufig Anfangsbedingungen. Bei einem System müssen Anfangswerte für alle unbekannt Funktionen gegeben sein, zum Beispiel

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Die Lösung des Systems besteht aus zwei Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$ . Für jedes  $t$  erhält man dadurch einen Punkt  $(x(t), y(t))$  in der  $xy$ -Ebene. Wenn  $t$  variiert, beschreibt dieser Punkt eine Kurve in der  $xy$ -Ebene. Diese Kurve nennt man auch Lösungskurve oder Trajektorie.

## 2 Entkoppelte und teilweise entkoppelte Systeme

Bei einem System von Differentialgleichungen können die Gleichungen unterschiedlich stark voneinander abhängen. Besonders einfach sind Systeme, bei denen mindestens eine Gleichung unabhängig von den anderen unbekannt Funktionen gelöst werden kann.

### Entkoppelte Systeme

Ein System heisst entkoppelt, wenn jede Gleichung nur von der zugehörigen unbekannt Funktion abhängt. Zum Beispiel:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ y'(t) = g(t, y(t)). \end{cases}$$

Dann kann man die beiden Differentialgleichungen unabhängig voneinander lösen.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{und} \quad y'(t) = g(t, y(t)).$$

Das System zerfällt also in zwei einzelne gewöhnliche Differentialgleichungen.

### Teilweise entkoppelte Systeme

Ein System heisst teilweise entkoppelt, wenn nur eine der Gleichungen unabhängig von der anderen unbekannt Funktion ist. Zum Beispiel:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)). \end{cases}$$

Die erste Gleichung kann direkt gelöst werden, weil sie nur  $x(t)$  enthält. Hat man  $x(t)$  bestimmt, setzt man diese Lösung in die zweite Gleichung ein. Dadurch erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung nur noch für  $y(t)$ .

### Vorgehen

Bei teilweise entkoppelten Systemen geht man systematisch vor:

1. Suche eine Gleichung, die nur eine unbekannt Funktion enthält.
2. Löse diese Gleichung zuerst.
3. Setze die gefundene Lösung in die andere Gleichung ein.
4. Löse die dadurch entstehende Differentialgleichung.
5. Verwende die Anfangsbedingungen, um die Konstanten zu bestimmen.

## Übungsaufgabe: Teilweise entkoppeltes System

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^2, \\ y'(t) = x(t)y(t), \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Hinweis: Löse zuerst die Gleichung für  $x(t)$  und setze das Resultat anschliessend in die zweite Gleichung ein.

$\frac{dx}{dt} = -x^2 \quad / \cdot \frac{1}{x^2} / \cdot dt / \int$	$\underline{y(t) = C_2(t+1)}$
$\int x^{-2} dx = -\int dt$	$y(0) = C_2(0+1)$
$-\frac{1}{x} = -t + C_1 \quad / \cdot (-1)$	$2 = C_2$
$\frac{1}{x} = t + C_1 \quad / ( )^{-1}$	$\downarrow$
$\underline{x(t) = \frac{1}{t+C_1}}$	$\underline{y(t) = 2(t+1)}$
$x(0) = \frac{1}{0+C_1}$	
$1 = \frac{1}{C_1} \quad / ( )^{-1}$	
$1 = C_1$	
$\downarrow$	
$\underline{x(t) = \frac{1}{t+1}}$	
$y'(t) = x(t)y(t)$	
$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+1} \cdot y \quad / \cdot \frac{1}{y} / \cdot dt / \int$	
$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{t+1} dt$	
$\ln y  = \ln t+1  + C_2 \quad / e^{\wedge}$	
$e^{\ln y } = e^{C_2 + \ln t+1 }$	
$y = C_2 \cdot e^{\ln t+1 }$	

### 3 Gekoppelte Systeme

Bei einem gekoppelten System hängen die Gleichungen gegenseitig voneinander ab. Das bedeutet, dass keine Gleichung direkt unabhängig von den anderen unbekannt Funktionen gelöst werden kann.

Ein typisches lineares gekoppeltes System mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  Konstanten sind. Für solche Systeme gibt es zwei wichtige Lösungsmethoden: die Eliminationsmethode und die Matrixmethode.

#### Eliminationsmethode

Bei der Eliminationsmethode eliminiert man eine der beiden unbekannt Funktionen. Dazu leitet man eine der beiden Gleichungen nochmals ab und verwendet anschliessend die ursprünglichen Gleichungen, um die andere Funktion zu ersetzen.

Die Grundidee ist:

System aus zwei DGLs erster Ordnung  $\longrightarrow$  eine DGL zweiter Ordnung.

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man dann mit den bekannten Methoden lösen, zum Beispiel mit dem Euler-Ansatz. Danach bestimmt man die zweite unbekannt Funktion durch Zurück einsetzen.

#### Matrixmethode

Das gleiche System kann man auch in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

schreibt man kurz

$$\vec{z}'(t) = A\vec{z}(t).$$

Einsetzen in  $\vec{z}'(t) = A\vec{z}(t)$  führt auf

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Das bedeutet:  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$ , und  $\vec{v}$  ist ein zugehöriger Eigenvektor.

Die Eigenwerte bestimmt man mit der Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad I = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei  $I$  die **Identitätsmatrix** bezeichnet. Für eine  $2 \times 2$ -Matrix erhält man also

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung nennt man die charakteristische Gleichung der Matrix  $A$ .

Hat man einen Eigenwert  $\lambda$  gefunden, so bestimmt man den zugehörigen Eigenvektor  $\vec{v}$  durch

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Für eine  $2 \times 2$ -Matrix bedeutet das:

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hat  $A$  zwei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ , dann ist die allgemeine Lösung

$$\vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2.$$

## Vorgehen

Bei der Matrixmethode geht man systematisch vor:

1. Schreibe das System in der Form  $\vec{z}'(t) = A\vec{z}(t)$ .
2. Bestimme die Eigenwerte von  $A$  mit  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
3. Bestimme zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor durch

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

4. Setze die allgemeine Lösung zusammen:

$$\vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2.$$

5. Verwende die Anfangsbedingungen, um die Konstanten  $C_1, C_2$  zu bestimmen.

## Inhomogene Systeme

Bei inhomogenen Systemen treten zusätzlich Terme auf, die nicht von den unbekannt Funktionen abhängen. Zum Beispiel:

$$\vec{z}'(t) = A\vec{z}(t) + \vec{b}(t).$$

Für solche Systeme ist die Matrixmethode zwar ebenfalls möglich, führt aber auf eine Variante der Variation der Konstanten für Systeme. Diese Methode benötigt zusätzlichen Formalismus und ist rechnerisch meist aufwendiger.

In dieser Übungsstunde verwenden wir bei inhomogenen gekoppelten Systemen nur die Eliminationsmethode. Dadurch erhält man eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche mit den bekannten Methoden gelöst werden kann:

$$\text{allgemeine Lösung} = \text{homogene Lösung} + \text{partikuläre Lösung}.$$

## Vergleich der Methoden

Für homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten kann man entweder die Eliminationsmethode oder die Matrixmethode verwenden. Beide Methoden liefern dieselbe Lösung, haben aber unterschiedliche Vorteile.

Der Vorteil der Eliminationsmethode ist, dass sie sehr direkt an die bekannten Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen anschliesst. Man reduziert das System auf eine einzelne Differentialgleichung höherer Ordnung und löst diese dann wie gewohnt, zum Beispiel mit dem Euler-Ansatz und gegebenenfalls mit einem Partikuläransatz. Deshalb ist diese Methode besonders praktisch bei inhomogenen Systemen.

Der Vorteil der Matrixmethode ist, dass sie systematischer ist. Ein System mit zwei unbekannt Funktionen führt auf eine  $2 \times 2$ -Matrix, ein System mit drei unbekannt Funktionen auf eine  $3 \times 3$ -Matrix, und allgemein führt ein System mit  $n$  unbekannt Funktionen auf eine  $n \times n$ -Matrix. Besonders bei grösseren homogenen linearen Systemen ist die Matrixmethode deshalb oft übersichtlicher und effizienter als das wiederholte Eliminieren von Variablen.

Zusammengefasst:

- **Eliminationsmethode:** intuitiv, nahe an bekannten ODE-Methoden und besonders praktisch bei inhomogenen Systemen.
- **Matrixmethode:** systematisch, gut für grössere Systeme und besonders praktisch bei homogenen linearen Systemen.

## Übungsaufgabe: Matrixmethode

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems mit der Matrixmethode:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = 0$ $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ $(1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$ $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$ $(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{cc c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ +1 \end{array}$	$\begin{array}{cc c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow -2x + 2y = 0$ $\underline{y = x}$ $\underline{\underline{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ $(A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{cc c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ -1 \end{array}$ $\begin{array}{cc c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow 2x + 2y = 0$ $\underline{y = -x}$ $\underline{\underline{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$ $\underline{\underline{z(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$ $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$ $x(0) = 3 \rightarrow C_1 + C_2 = 3$ $y(0) = 1 \rightarrow C_1 - C_2 = 1$ $\underline{\underline{2C_1 = 4}}$ $\underline{\underline{C_1 = 2}} \rightarrow \underline{\underline{C_2 = 1}}$ $\underline{\underline{x(t) = 2e^{3t} + e^{-t}}}$ $\underline{\underline{y(t) = 2e^{3t} - e^{-t}}}$
--	--

## Übungsaufgabe: Eliminationsmethode

Bestimme die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems mit der Eliminationsmethode:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 3e^t, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Leite die erste Gleichung nochmals ab und eliminiere anschliessend  $y(t)$ .

$x'(t) = x(t) + 2y(t) \quad / -x(t)$ $2y(t) = x'(t) - x(t)$ $\underline{y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - \frac{1}{2}x(t)} \quad / \frac{d}{dt}$ $\underline{y'(t) = \frac{1}{2}x''(t) - \frac{1}{2}x'(t)}$ $y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 3e^t$ $\frac{1}{2}x''(t) - \frac{1}{2}x'(t) = 3x(t) + 2\left(\frac{1}{2}x'(t) - \frac{1}{2}x(t)\right) + 3e^t$ $\frac{1}{2}(x''(t) - x'(t)) = 3x(t) + x'(t) - x(t) + 3e^t$ $\frac{1}{2}(x''(t) - x'(t)) = x'(t) + 2x(t) + 3e^t \quad / \cdot 2$ $x''(t) - x'(t) = 2x'(t) + 4x(t) + 6e^t$ $\quad \downarrow -2x'(t) - 4x(t)$ $\underline{x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 6e^t}$ <p style="text-align: center;">Homogenisieren</p> $x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 0 \quad / \text{Euler Ansatz}$ $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ $(\lambda - 4)(\lambda + 1)$ $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$ $\underline{x_h(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}}$ <p style="color: red;">Siehe Tabelle aus Analysis A ÜS 13 für Partikuläranatz</p> $x_p(t) = Ae^t$ $x_p'(t) = Ae^t$ $x_p''(t) = Ae^t$	$x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 6e^t$ $Ae^t - 3Ae^t - 4Ae^t = 6e^t \quad / : e^t$ $A - 3A - 4A = 6$ $-6A = 6 \quad / : (-6)$ $\underline{A = -1}$ $\underline{x_p(t) = -e^t}$ $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} - e^t \quad / \frac{d}{dt}$ $x'(t) = 4C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} - e^t$ $y(t) = \frac{1}{2}(x'(t) - x(t))$ $y(t) = \frac{1}{2}(4C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} - e^t - (C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} - e^t))$ $y(t) = \frac{1}{2}(3C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-t})$ $\underline{y(t) = \frac{3}{2}C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t}}$ $x(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$ $y(0) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}C_1 - C_2 = 0$ $\frac{5}{2}C_1 = 1 \rightarrow \underline{C_1 = \frac{2}{5}}$ $C_2 = \frac{3}{2}C_1$ $C_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \rightarrow \underline{C_2 = \frac{3}{5}}$ $\underline{x(t) = \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} - e^t}$ $\underline{y(t) = \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t}}$
---	--