Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 9

Umkehrung der Integrationsreihenfolge & Polarkoordinaten

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 30.04.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Umkehrung der Integrationsreihenfolge
2. Polarkoordinaten
3. Funktionen in Polarkoordinaten
4. Integration in Polarkoordinaten

1 Integralgrenzentausch

In den Aufgaben, die wir in dieser Übungsstunde und in dieser Vorlesung betrachten, sind die Integrationsgebiete „nett“ gewählt. Das bedeutet: Nach dem Wechsel der Integrationsreihenfolge kann das Gebiet weiterhin durch ein einziges iteriertes Integral beschrieben werden.

Wir müssen das Gebiet also nicht in mehrere Teilgebiete aufteilen. Stattdessen genügt es, das ursprüngliche Gebiet zu skizzieren, die Randkurven passend umzuformen und die neuen Grenzen aus der Skizze abzulesen.

Grundidee

Ein Integral der Form

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

beschreibt das Gebiet

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

Beim Grenzentausch sucht man eine äquivalente Beschreibung desselben Gebiets in der Form

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Dann gilt

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Vorgehen beim Integralgrenzentausch

Beim Umkehren der Integrationsreihenfolge geht man systematisch vor:

1. Lies aus dem gegebenen Integral das Integrationsgebiet R ab. Bestimme die Randpunkte und Randkurven und klassifiziere sie kurz (untere, obere, linke oder rechte Grenze).

2. Skizziere das Gebiet R in der xy-Ebene, indem du zuerst die Randpunkte einzeichnest und anschliessend die Randkurven korrekt verbindest.

3. Bestimme die neuen äusseren Grenzen. Diese sind konstant und geben an, zwischen welchen Werten die neue äussere Variable läuft.

4. Bestimme die neuen inneren Grenzen. Dazu formt man die bisherigen Randkurven nach der anderen Variablen um, also gegebenenfalls mit Hilfe der Umkehrfunktion.

   Ist das ursprüngliche Integral zum Beispiel in der Form

   $$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

   gegeben, so beschreibt man die Randkurven

   $$y = g_1(x), \qquad y = g_2(x)$$

   nach dem Grenzentausch als Funktionen der Form

   $$x = h_1(y), \qquad x = h_2(y).$$

   Anschliessend liest man aus der Skizze ab, welche Kurve in der neuen Beschreibung die untere bzw. obere Grenze bildet (oder bei dx-innen: die linke bzw. rechte Grenze).

5. Stelle das Integral in der umgekehrten Reihenfolge neu auf.

Worauf man achten muss

Die neuen Grenzen werden nicht einfach blind vertauscht. Entscheidend ist immer, dass das neue Integral genau dasselbe Gebiet beschreibt wie das ursprüngliche. Deshalb ist die Skizze des Integrationsgebiets der wichtigste Schritt beim Integralgrenzentausch.

Übungsaufgabe: Integralgrenzentausch I

Kehre die Reihenfolge der Integration um. Skizziere dazu zuerst den Integrationsbereich.

$$\int_{x_1=0}^{x_2=4}\int_{y_1=0}^{y_2=\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx \longleftarrow \int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$x_1 = 0$ Linke Grenze

$x_2 = 4$ Rechte Grenze

$y_1 = 0$ Untere Grenze

$y_2 = \sqrt{x}$ Obere Grenze

$\underline{y_1 = 0}$

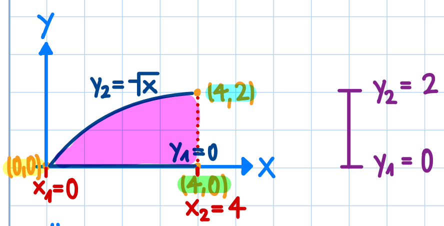
$y_1(0) = 0 \longrightarrow P(0,0)$

$y_1(4) = 0 \longrightarrow P(4,0)$

$\underline{y_2 = \sqrt{x}}$

$y_2(0) = \sqrt{0} = 0 \rightarrow P(0,0)$

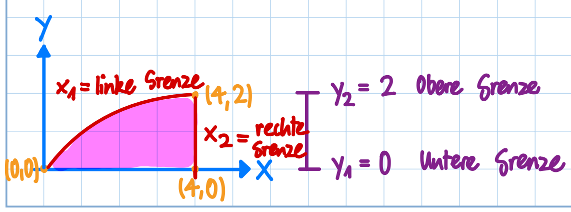
$y_2(4) = \sqrt{4} = 2 \rightarrow P(4,2)$



Äusseres Integral

$$\int_{y_1=0}^{y_2=2} (\dots)\, dy$$

Inneres Integral



$x_2(y) = 4$ (ablesen)

$x_1(y)$: Umkehrfkt. von $y_2(x)$

$y_2(x) = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x} \quad /()^2$

$y^2 = x \longrightarrow x_1(y) = y^2$

$$\int_{x_1=y^2}^{x_2=4} f(x,y)\,dx$$

Zusammensetzen

$$\underline{\underline{\int_0^2\int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy}}$$

Übungsaufgabe: Integralgrenzentausch II

Kehre die Reihenfolge der Integration um. Skizziere dazu zuerst den Integrationsbereich.

$$\int_{y_1=0}^{y_2=1}\int_{x_1=0}^{x_2=e^y-1} f(x,y)\,dx\,dy \longleftarrow \int_0^1\int_0^{e^y-1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$x_1 = 0$ Linke Grenze

$x_2 = e^y - 1$ Rechte Grenze

$y_1 = 0$ Untere Grenze

$y_2 = 1$ Obere Grenze

$\underline{x_1 = 0}$

$x_1(0) = 0 \longrightarrow P(0,0)$

$x_1(1) = 0 \longrightarrow P(\underset{x}{0},\underset{y}{1})$

$\underline{x_2 = e^y - 1}$

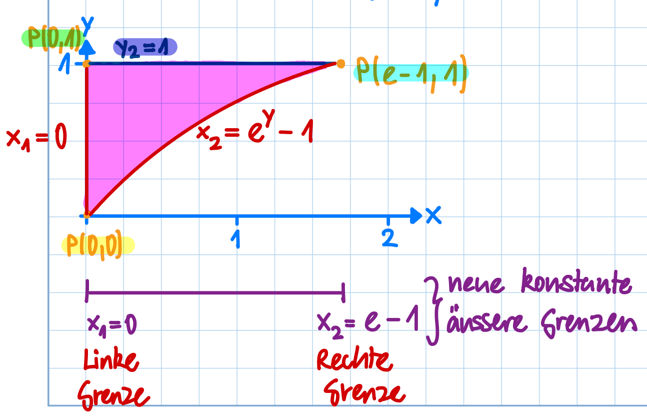
$x_2(0) = e^0 - 1 = 0 \rightarrow P(0,0)$

$x_2(1) = e^1 - 1 = e - 1 \rightarrow P(\underset{x}{e-1},\underset{y}{1})$

Umkehrfkt. bilden (einfacher zum einzeichnen)

$x_2 = e^y - 1 \xrightarrow{+1} x + 1 = e^y \ /\ln$

$x_2 \leftrightarrow y(x) = \ln(x+1)$



Äussere Grenzen

$$\int_{x_1=0}^{x_2=e-1} (\ldots)\,dx$$

Innere Grenzen

$y_1(x)$ ist Umkehrfkt. von $x_2 = e^y - 1$ (bereits gebildet)

$y_1(x) = \ln(x+1)$ Untere Grenze

$y_2(x)$ ist eine Horizontale Gerade (kann man in der Skizze einfach ablesen!) $\rightarrow y_2(x) = 1$ Obere Grenze

$$\int_{y_1=\ln(x+1)}^{y_2=1} f(x,y)\,dy$$

Zusammensetzen

$$\underline{\underline{\int_0^{e-1}\int_{\ln(x+1)}^{1} f(x,y)\,dy\,dx}}$$

2 Polarkoordinaten

Bisher haben wir Punkte in der Ebene meistens mit kartesischen Koordinaten beschrieben:

$$(x, y).$$

Dabei gibt x die horizontale und y die vertikale Position eines Punktes an.
Eine alternative Beschreibung von Punkten in der Ebene sind die **Polarkoordinaten**. Statt horizontaler und vertikaler Position beschreibt man einen Punkt durch

$$(r, \varphi).$$

Dabei bedeutet:

- r ist der Abstand des Punktes vom Ursprung,
- φ ist der Winkel zur positiven x-Achse.

Dabei gilt $r \geq 0$, da r den Abstand zum Ursprung beschreibt. Der Winkel φ wird meistens im Bogenmass angegeben, zum Beispiel mit $\varphi \in [0, 2\pi)$.

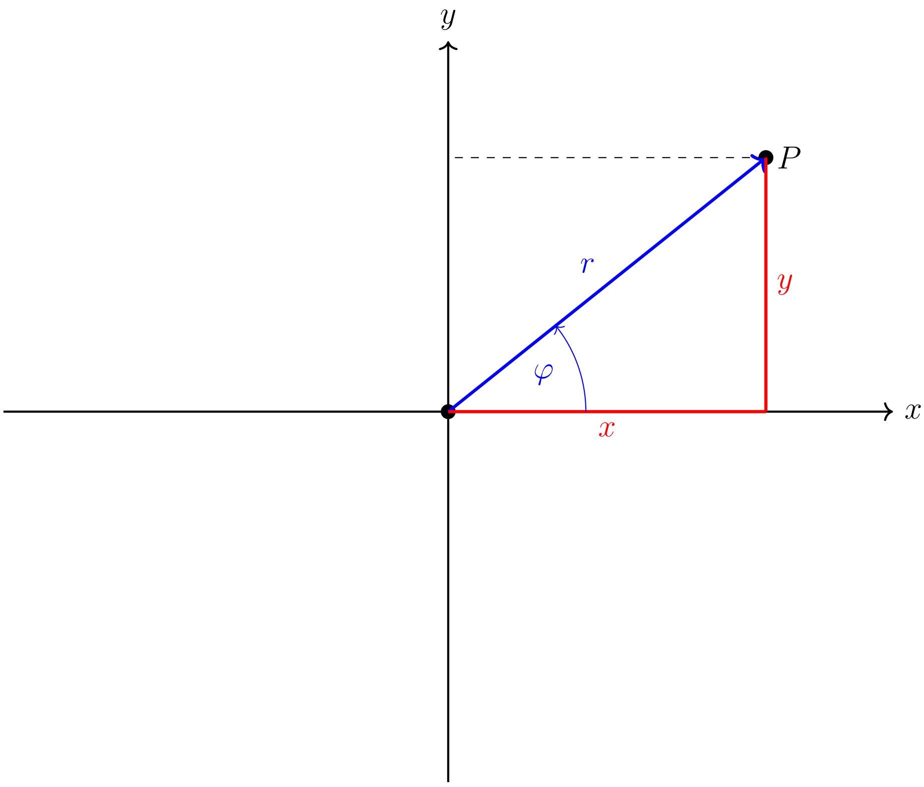


Abbildung 1: Geometrische Bedeutung der Polarkoordinaten. Der Punkt P kann entweder durch seine kartesischen Koordinaten (x, y) oder durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben werden.

Umrechnung zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

Die wichtigsten Umrechnungsformeln zwischen kartesischen Koordinaten (x, y) und Polarkoordinaten (r, φ) sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Kartesische Koordinaten	**Polarkoordinaten**
x	$r\cos(\varphi)$
y	$r\sin(\varphi)$
$\sqrt{x^2+y^2}$	r
$\frac{y}{x}$	$\tan(\varphi)$

Vergleich mit komplexen Zahlen. Polarkoordinaten sind sehr ähnlich zur Polarform komplexer Zahlen. Einen Punkt (x, y) kann man mit der komplexen Zahl

$$z = x + iy$$

identifizieren. Dann gilt

$$z = re^{i\varphi} = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi).$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man

$$\boxed{x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi).}$$

Ausserdem gilt

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}.}$$

Der Winkel φ entspricht dem Argument der komplexen Zahl $z = x + iy$. Deshalb muss man beim Bestimmen von φ, wie bei komplexen Zahlen, auf den Quadranten achten. Siehe dazu auch Analysis A Übungsstunde 2 (Tabelle zur Umrechnung von Polar- und Normalform).

3 Funktionen in Polarkoordinaten

Sei eine Funktion in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$f(x, y).$$

Um diese Funktion in Polarkoordinaten zu schreiben, ersetzt man

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi).$$

Dadurch erhält man eine neue Funktion in den Variablen r und φ:

$$\widetilde{f}(r, \varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Man schreibt also:

$$f(x, y) \quad \longrightarrow \quad f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \widetilde{f}(r, \varphi).$$

Warum macht man das? Das Umschreiben einer Funktion von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten kann nützlich sein, weil man dadurch Abstand und Richtung getrennt betrachten kann.
In kartesischen Koordinaten beschreibt man einen Punkt durch

$$(x, y).$$

Dabei sind Abstand vom Ursprung und Richtung oft miteinander vermischt. In Polarkoordinaten beschreibt man denselben Punkt durch

$$(r, \varphi),$$

wobei r den Abstand vom Ursprung und φ die Richtung beschreibt.
Dadurch kann man bei vielen Funktionen besser erkennen, wie sich die Funktion verändert, wenn man

- den Abstand r vom Ursprung verändert,
- oder die Richtung φ verändert.

Besonders stark vereinfacht sich die Darstellung bei Funktionen, die Ausdrücke der Form

$$x^2 + y^2$$

enthalten. Der Grund ist, dass in Polarkoordinaten gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Zum Beispiel werden Funktionen, die ursprünglich von zwei Variablen x und y abhängen, in Polarkoordinaten manchmal zu Funktionen, die nur noch von r abhängen. Dann hat man statt

$$f(x, y)$$

eine Darstellung der Form

$$\widetilde{f}(r, \varphi) = g(r).$$

Das bedeutet: Der Funktionswert hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab, aber nicht vom Winkel φ. Solche Funktionen sind radialsymmetrisch.

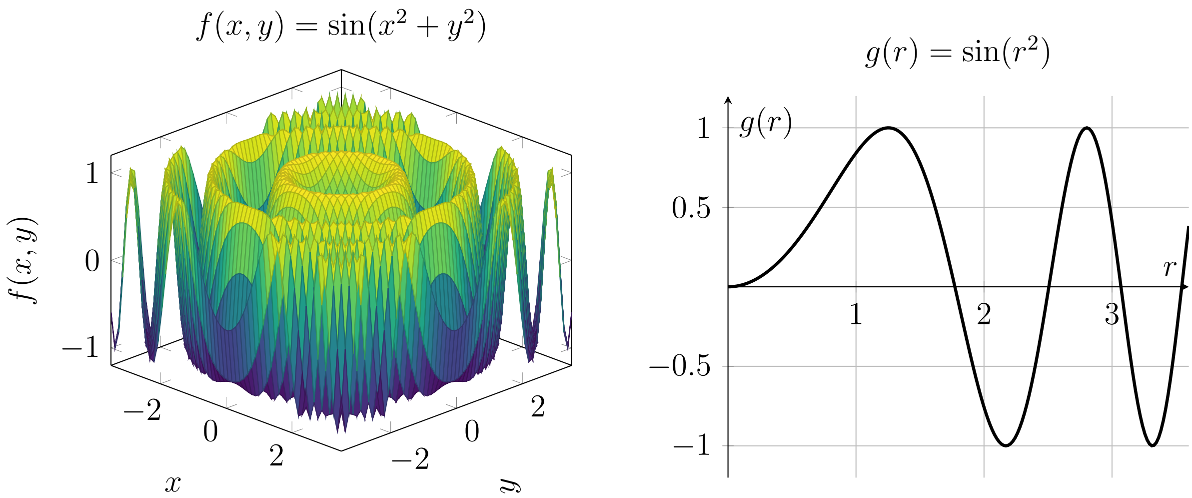


Abbildung 2: Links der Graph der radialsymmetrischen Funktion $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, rechts dieselbe Funktion in Polarkoordinaten als Funktion $g(r) = \sin(r^2)$. Man erkennt, dass der Funktionswert nur vom Abstand r zum Ursprung abhängt, nicht aber vom Winkel φ.

4 Integration in Polarkoordinaten

Ausblick auf Integration. Polarkoordinaten sind nicht nur nützlich, um Funktionen einfacher darzustellen. Sie können auch Integrationsaufgaben deutlich vereinfachen.

Besonders bei kreisförmigen Integrationsgebieten, Kreisscheiben oder Kreisringen passen Polarkoordinaten oft besser zur Geometrie des Problems als kartesische Koordinaten. Das gilt vor allem dann, wenn zusätzlich die Funktion selbst radialsymmetrisch ist.

Aber auch wenn die Funktion nicht radialsymmetrisch ist, kann es bei kreisförmigen Gebieten sinnvoll sein, zuerst in Polarkoordinaten zu wechseln, weil sich die Grenzen des Integrationsgebiets dadurch häufig viel einfacher beschreiben lassen.

Merksatz. Wenn ein Problem eine kreisförmige Struktur besitzt oder Ausdrücke der Form

$$x^2 + y^2$$

enthält, sollte man an Polarkoordinaten denken.
In Polarkoordinaten ersetzt man

$$x \mapsto r\cos(\varphi), \qquad y \mapsto r\sin(\varphi), \qquad x^2 + y^2 \mapsto r^2.$$

Grundidee

Bei einem Doppelintegral in kartesischen Koordinaten integriert man über kleine Flächenelemente in der xy-Ebene:

$$\iint_R f(x,y)\,dA.$$

Wenn das Gebiet R kreisförmig ist oder sich besser durch Abstand und Winkel beschreiben lässt, verwenden wir Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi).$$

Dabei wird die Funktion umgeschrieben zu

$$f(x,y) \to f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \widetilde{f}(r,\varphi).$$

Das Flächenelement in Polarkoordinaten

Beim Wechsel zu Polarkoordinaten darf man aber nicht einfach

$$dA = dr\,d\varphi \qquad \text{(Falsch)}$$

schreiben.

Der Grund ist, dass kleine Flächenelemente in Polarkoordinaten nicht rechteckig sind, sondern näherungsweise kleine Kreissektoren. Je weiter man vom Ursprung entfernt ist, desto länger wird ein kleines Winkelstück. Das korrekte Flächenelement ist daher

$$\boxed{dA = \boldsymbol{r}\, dr\, d\varphi}$$

Der zusätzliche Faktor $\boldsymbol{r}$ ist sehr wichtig und darf beim Integrieren in Polarkoordinaten nicht vergessen werden!

Herleitung über die Jacobi-Determinante. Die Transformation von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten ist

$$(r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\det(J) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r.$$

Also folgt

$$dA = |\det(J)|\, dr\, d\varphi = r\, dr\, d\varphi.$$

Hinweis. Diese Herleitung ist NICHT prüfungsrelevant, sondern dient nur der Motivation. Für uns ist vor allem wichtig, dass beim Wechsel zu Polarkoordinaten den Faktor r im Integral nicht vergessen.

Formel für Integration in Polarkoordinaten

Sei R ein Gebiet in der xy-Ebene. Wenn wir dieses Gebiet in Polarkoordinaten beschreiben, erhalten wir Grenzen für die Variablen r und φ.

In der Praxis schreiben wir das Integral direkt als iteriertes Integral:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \widetilde{f}(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi.}$$

Dabei gilt:

- $\alpha \le \varphi \le \beta$ beschreibt den Winkelbereich,
- $r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$ beschreibt den Abstand vom Ursprung. Allgemein können r_1 und r_2 von φ abhängen. In den meisten Fällen, zum Beispiel bei Kreisscheiben oder Kreisringen, sind r_1 und r_2 jedoch Konstanten.
- Der Faktor r kommt vom Flächenelement $dA = r\,dr\,d\varphi$.

Wichtig. Beim Wechsel zu Polarkoordinaten ersetzt man nicht nur x und y, sondern auch das Flächenelement:

$$dA = r\,dr\,d\varphi.$$

Typische Integrationsgebiete

Kreisscheibe mit Radius R. Die Kreisscheibe A um den Ursprung mit Radius R ist gegeben durch

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

In Polarkoordinaten wird daraus

$$0 \le r \le R, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Also gilt:

$$\iint_A f(x, y)\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \widetilde{f}(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Kreisring. Ein Kreisring zwischen den Radien a und b ist gegeben durch

$$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2.$$

In Polarkoordinaten wird daraus

$$a \le r \le b, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Kreissektor. Ein Kreissektor mit Radius R und Winkelbereich $\alpha \le \varphi \le \beta$ wird beschrieben durch

$$0 \le r \le R, \qquad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

Vorgehen in der Praxis

Um ein Doppelintegral in Polarkoordinaten zu berechnen, geht man systematisch vor:

1. Skizziere das Integrationsgebiet R in der xy-Ebene und entscheide, ob Polarkoordinaten sinnvoll sind.
2. Beschreibe das Gebiet mit Grenzen für r und φ.
3. Ersetze in der Funktion

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi), \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

4. Ersetze das Flächenelement durch

$$\boxed{dA = \boldsymbol{r}\, dr\, d\varphi}$$

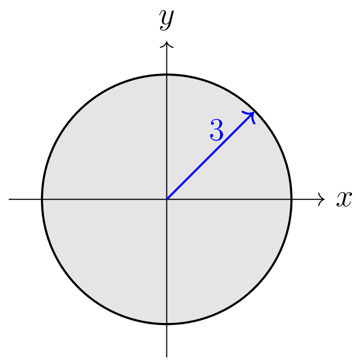
5. Stelle das Integral auf und berechne es.

Übungsaufgabe: Kreisscheibe

Bestimme mit Hilfe von Polarkoordinaten den Wert des Doppelintegrals

$$\iint_A (x^2 + y^2)\, dA,$$

wobei A die Kreisscheibe mit Radius 3 um den Ursprung ist.



$A: \; x^2 + y^2 \leq 9$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\tilde{f}(r,\varphi) = r^2$$

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \iint \tilde{f}(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \cdot r\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^3 r^3\, dr$$

$$= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^3$$

$$= (2\pi - 0) \cdot \left(\tfrac{1}{4}(3)^4 - \tfrac{1}{4}(0)^3\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{81}{4}$$

$$= \frac{81\pi}{2}$$

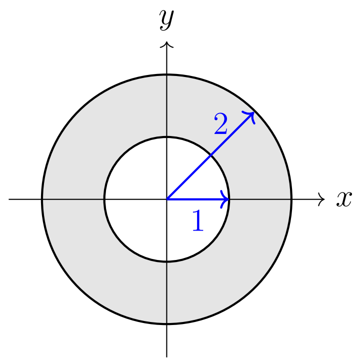
$$\underline{\underline{\iint_A (x^2 + y^2)\, dA = \frac{81\pi}{2}}}$$

Übungsaufgabe: Kreisring

Bestimme mit Hilfe von Polarkoordinaten den Wert des Doppelintegrals

$$\iint_A \ln\left(x^2+y^2\right)\,dA,$$

wobei A der Kreisring $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ ist.



$A:\ 1\le x^2+y^2\le 4$

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad \underbrace{\ln|r|}_{} = \ln(r) \text{ da } r \text{ eh nie negativ}$$

$$\tilde f(r,\varphi) = \ln(r^2) = 2\ln|r|$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} \tilde f(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 2\ln(r)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= \underbrace{2\int_0^{2\pi} d\varphi}_{} \cdot \int_1^2 \ln(r)\cdot r\, dr \quad \} \text{ Partielle Integration}$$

$$2\left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$2\cdot(2\pi-0)$$

$$\underbrace{4\pi}_{}$$

$$\underbrace{\begin{array}{l|l} u=\ln(r) & v'=r \\ u'=\frac{1}{r} & v=\frac{1}{2}r^2 \end{array}}_{}$$

$$\left[\ln(r)\cdot\tfrac{1}{2}r^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2}r^2\, dr$$

$$\frac{1}{2}\left(2^2\cdot\ln(2) - 1^2\cdot\underbrace{\ln(1)}_{0}\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 r\, dr$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4\ln(2) - \frac{1}{4}\left[r^2\right]_1^2$$

$$2\ln(2) - \frac{1}{4}\left(2^2-1^2\right)$$

$$\underbrace{2\ln(2) - \frac{3}{4}}_{}$$

$$= 4\pi \cdot \left(2\ln(2)-\frac{3}{4}\right)$$

$$= 8\pi\ln(2) - 3\pi$$

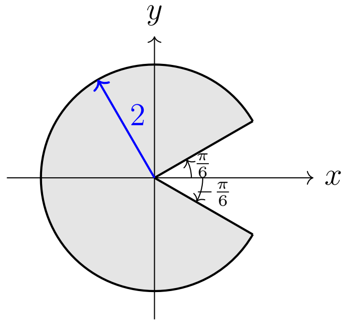
$$\iint_A \ln(x^2+y^2)\,dA = \pi\cdot\left(8\ln(2)-3\right)$$

Übungsaufgabe: Pacman-Gebiet

Bestimme mit Hilfe von Polarkoordinaten den Wert des Doppelintegrals

$$\iint_A x^2 \, dA,$$

wobei A die Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung ist, aus welcher folgender Sektor entfernt wurde: $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.



$A: \ 0 \leq r \leq 2, \ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{11\pi}{6}$

$$\text{Hinweis: } \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$f(x,y) = x^2$

$\tilde{f}(x,y) = (r\cos(\varphi))^2 = r^2 \cos^2(\varphi)$

$\downarrow$

$\int_{\pi/6}^{11\pi/6} \int_0^2 r^2 \cos^2(\varphi) \, r \, dr \, d\varphi$

$\int_{\pi/6}^{11\pi/6} \cos^2(\varphi) \, d\varphi \cdot \int_0^2 r^3 \, dr$

$\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \left[r^4\right]_0^2$

$\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^4$

$\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot 16$

$\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 4$

$\frac{20\pi}{6} - \sqrt{3}$

$\frac{10\pi}{3} - \sqrt{3}$

$\downarrow$

$\iint_A x^2 \, dA = \frac{10\pi}{3} - \sqrt{3}$