Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 8

Mehrdimensionale Integration

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 23.04.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Einführung in mehrdimensionale Integration
2. Iterierte Integrale auf Rechteckgebieten
3. Anwendungen: Integration von Dichtefunktionen
4. Integration über allgemeine Gebiete

1 Einführung in mehrdimensionale Integration

In Analysis A haben wir Integrale von Funktionen einer Variablen betrachtet:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Diese beschreiben beispielsweise die Fläche unter dem Graphen der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$.
In Analysis B erweitern wir dieses Konzept auf Funktionen von mehreren Variablen. Der wichtigste Fall zu Beginn ist eine Funktion von zwei Variablen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Statt über ein Intervall in $\mathbb{R}$ integrieren wir nun über ein Gebiet $R \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene.

Grundidee

Das Integral einer Funktion $f(x, y)$ über ein Gebiet R nennt man **Doppelintegral** und schreibt

$$\iint_R f(x, y)\,dA.$$

Dabei steht dA für ein kleines Flächenelement in der xy-Ebene.
Anschaulich zerlegt man das Gebiet R in viele kleine Teilflächen ΔA. Auf jedem kleinen Teilstück ist der Funktionswert näherungsweise konstant, sodass ein Beitrag der Form

$$f(x, y)\,\Delta A$$

entsteht. Die Summe all dieser Beiträge führt im Grenzübergang auf das Doppelintegral.

Geometrische Interpretation

Ist $f(x, y) \geq 0$, so beschreibt das Doppelintegral

$$\iint_R f(x, y)\,dA$$

das Volumen des Körpers, der

- von oben durch die Fläche $z = f(x, y)$,
- von unten durch die xy-Ebene $(z = 0)$,
- und seitlich durch das Gebiet R

begrenzt wird.
Das Doppelintegral ist somit die Verallgemeinerung des Integrals in einer Variablen:

- $\int_a^b f(x)\,dx$ beschreibt eine Fläche,
- $\iint_R f(x,y)\,dA$ beschreibt ein Volumen.

Typische Anwendungen

Flächeninhalt Wählt man $f(x,y) = 1$, so erhält man

$$\iint_R 1\,dA,$$

also den Flächeninhalt des Gebiets R.

Masse einer dünnen Platte Ist $\rho(x,y)$ eine Flächendichte, so ist die Masse einer Platte über dem Gebiet R gegeben durch

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA.$$

Volumen unter einer Fläche Ist $f(x,y) \geq 0$, so ergibt sich das Volumen unter dem Graphen von f über dem Gebiet R als

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Merksatz

Ein Doppelintegral

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

summiert die Funktionswerte $f(x,y)$ über alle Flächenelemente des Gebiets R.
Dabei sind immer folgende Fragen zentral:

1. Wie sieht das Integrationsgebiet R aus?
2. Was beschreibt die Funktion $f(x,y)$?
3. Welche physikalische oder geometrische Grösse wird berechnet?

2 Iterierte Integrale auf Rechteckgebieten

Im einfachsten Fall integrieren wir über ein Rechteck der Form

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

In diesem Fall kann das Doppelintegral als **iteriertes Integral** geschrieben werden:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Das bedeutet:

- Zuerst wird nach der inneren Variablen integriert, hier also nach y.
- Danach wird das Resultat nach der äusseren Variablen integriert, hier also nach x.

Interpretation

Man kann sich das Gebiet R als Rechteck in der xy-Ebene vorstellen. Für jeden festen Wert von x läuft die Variable y von c bis d. Die innere Integration

$$\int_c^d f(x, y)\, dy$$

summiert also die Beiträge entlang eines vertikalen Streifens.
Anschliessend summiert die äussere Integration

$$\int_a^b (\cdots)\, dx$$

alle diese Streifen von links nach rechts auf.

Reihenfolge der Integration

Bei Rechteckgebieten kann man die Reihenfolge der Integration vertauschen:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Das bedeutet:

- Entweder integriert man zuerst nach y und dann nach x,
- oder zuerst nach x und dann nach y.

Solange das Integrationsgebiet ein Rechteck ist und die Funktion stetig ist (was in diesem Kurs immer der Fall ist), führen beide Reihenfolgen zum selben Resultat.

Übungsaufgaben: Iterierte Integrale auf Rechteckgebieten

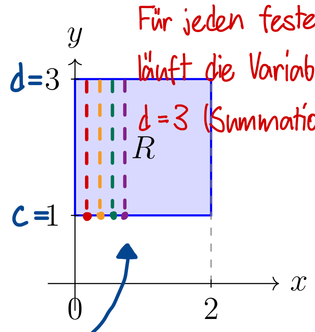
Aufgabe 1. Berechne das Doppelintegral

$$\iint_R (x+2y)\,dA$$

für $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\}$.

$\iint f(x,y)\,dy\,dx$

Für jeden festen Wert von x läuft die Variable von $c=1$ bis $d=3$ (Summation vertikaler Streifen)



$$\int_0^2 \int_1^3 (x+2y)\,dy\,dx$$

Innere Integration

$$\int_1^3 (x+2y)\,dy = \left[xy + y^2\right]_1^3$$
$$= (x\cdot 3 + 3^2) - (x\cdot 1 + 1^2)$$
$$= (3x+9) - (x+1)$$
$$= 3x + 9 - x - 1$$
$$= 2x + 8$$

Äussere Integration

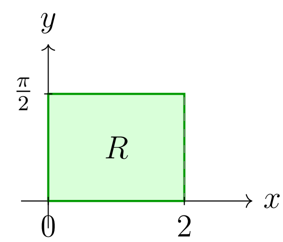
$$\int_0^2 (2x+8)\,dx = \left[x^2 + 8x\right]_0^2$$
$$= (2^2 + 8\cdot 2) - (0^2 + 8\cdot 0)$$
$$= 4 + 16$$
$$= 20$$

$$\int_0^2 \int_1^3 (x+2y)\,dy\,dx = 20$$

Aufgabe 2. Berechne das Doppelintegral

$$\iint_R (x\cos(y) + x)\,dA$$

für $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.



$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} (x\cos(y) + x)\,dy\,dx$$
$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x\cdot(\cos(y)+1)\,dy\,dx$$

Wenn man Integrand als Produkt einer reinen x-Fkt. und einer reinen y-Fkt. ausfaktorisieren kann, kann man das Doppelintegral auftrennen!

$$\int_0^2 x\,dx \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos(y)+1)\,dy$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\sin(y) + y\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\cdot\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) - (\sin(0) + 0)\right)$$
$$= (2)\cdot\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2 + \pi$$

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} (x\cos(y) + x)\,dy\,dx = 2 + \pi$$

3 Anwendungen: Integration von Dichtefunktionen

Eine wichtige Anwendung von Doppelintegralen ist die Berechnung der Masse einer dünnen Platte in der xy-Ebene.

Flächendichte

Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, welches die Platte in der Ebene beschreibt. Ist die Masse nicht überall gleichmässig verteilt, so wird sie durch eine **Flächendichte** $\rho(x, y)$ beschrieben. Dabei gibt $\rho(x, y)$ an, wie viel Masse pro Flächeneinheit sich am Punkt (x, y) befindet.

Masse einer dünnen Platte

Die Gesamtmasse der Platte erhält man, indem man die Dichte über das gesamte Gebiet R integriert:

$$m = \iint_R \rho(x, y)\, dA.$$

Anschaulich bedeutet dies:

- Man zerlegt die Platte in viele kleine Flächenelemente ΔA.
- Jedes kleine Flächenelement besitzt näherungsweise die Masse

$$\rho(x, y)\, \Delta A.$$

- Die Summe aller kleinen Massenbeiträge führt im Grenzübergang auf das Doppelintegral.

Spezialfall: konstante Dichte

Ist die Dichte überall konstant, also

$$\rho(x, y) = \rho_0,$$

so vereinfacht sich die Formel zu

$$m = \iint_R \rho_0\, dA = \rho_0 \iint_R 1\, dA.$$

Da

$$\iint_R 1\, dA$$

gerade den Flächeninhalt von R beschreibt, gilt in diesem Fall:

$$\text{Masse} = \text{Dichte} \times \text{Flächeninhalt}.$$

Dies ist genau die Verallgemeinerung der bekannten Formel aus elementaren Anwendungen.

Rechteckiger Spezialfall

Ist das Gebiet ein Rechteck

$$R = [a, b] \times [c, d],$$

so kann die Masse auch als iteriertes Integral geschrieben werden:

$$m = \iint_R \rho(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d \rho(x, y)\, dy\, dx.$$

Übungsaufgabe: Masse mit exponentieller Dichte

Eine dünne rechteckige Platte mit Gebiet $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$ habe die Flächendichte $\rho(x, y) = e^{x+y}$.

Bestimme die Masse der Platte.

$$m = \iint_R \rho(x,y)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 e^{x+y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 e^x \cdot e^y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 e^x\, dx \cdot \int_0^2 e^y\, dy$$

$$= \left[e^x\right]_0^1 \cdot \left[e^y\right]_0^2$$

$$= (e^1 - e^0) \cdot (e^2 - e^0)$$

$$\underline{\underline{m = (e-1)\cdot(e^2-1) = e^3 - e^2 - e + 1}}$$

4 Integration über allgemeine Gebiete

Bisher haben wir Doppelintegrale über Rechteckgebiete der Form

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

betrachtet. In vielen Anwendungen sind die Integrationsgebiete jedoch **keine Rechtecke**, sondern durch Kurven oder Funktionen begrenzt.

Beschreibung allgemeiner Gebiete

Ein Gebiet $R \subset \mathbb{R}^2$ kann oft in der Form

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

beschrieben werden.
Das bedeutet:

- Die Variable x läuft von a bis b.
- Für jedes feste x läuft y zwischen zwei Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$.

Geometrisch entspricht dies einer Beschreibung des Gebiets durch **vertikale Streifen**.
Analog kann man ein Gebiet auch durch

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

beschreiben. Hier wird das Gebiet durch **horizontale Streifen** erfasst.

Doppelintegral über allgemeine Gebiete

Ist das Gebiet R wie oben beschrieben, so ergibt sich das Doppelintegral als iteriertes Integral:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Im zweiten Fall erhält man entsprechend:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Im Gegensatz zu Rechteckgebieten hängen die Integrationsgrenzen hier von der jeweils anderen Variable ab. Ich persönlich bevorzuge die erste Variante, da sich viele Gebiete natürlich durch vertikale Streifen und Randkurven der Form $y = g(x)$ beschreiben lassen.

Vorgehen in der Praxis

Beim Aufstellen eines Doppelintegrals über ein allgemeines Gebiet geht man systematisch vor:

1. Skizziere das Gebiet R in der xy-Ebene.
2. Entscheide, ob eine Beschreibung mit vertikalen oder horizontalen Streifen einfacher ist.
3. Bestimme die äusseren Grenzen (für x oder y).
4. Bestimme die inneren Grenzen als Funktionen der anderen Variable.
5. Stelle das entsprechende iterierte Integral auf.

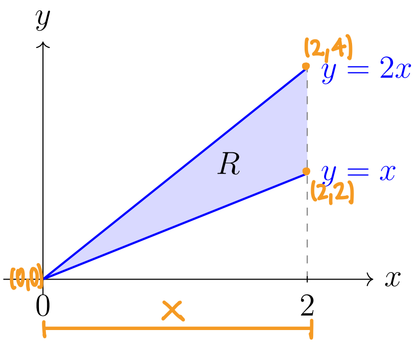
Die Wahl der Integrationsrichtung ist dabei nicht eindeutig. Je nach Form des Gebiets kann eine Darstellung deutlich einfacher sein als die andere.

Übungsaufgabe: Integration über ein allgemeines Gebiet

Berechne das Doppelintegral

$$\iint_R (x + y^2)\, dA$$

über $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2x\}$.



Äussere Grenzen

$$\int_{x=0}^{x=2} (\ldots)\, dx$$

Innere Grenzen

$$\int_{y=x}^{y=2x} (x+y^2)\, dy$$

Zusammensetzen

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x}^{y=2x} (x+y^2)\, dy\, dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_{x}^{2x} dx$$

$$\int_0^2 \left(\left(x\cdot 2x + \frac{(2x)^3}{3}\right) - \left(x\cdot x + \frac{(x)^3}{3}\right)\right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\left(2x^2 + \frac{8x^3}{3}\right) - \left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right) dx$$

$$\int_0^2 \left(2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\frac{7}{3}x^3 + x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{7}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\cdot\left(\frac{7}{4}x + 1\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{7}{4}\cdot 2 + 1\right) - 0$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{9}{2} = 12$$

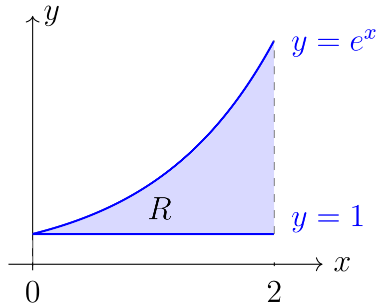
$$\iint_R (x+y^2)\, dA = 12$$

Übungsaufgabe: Integralgrenzen aus einer Skizze ablesen

Gegeben ist das Gebiet $R \subset \mathbb{R}^2$.

a) Lies aus der Skizze die Integrationsgrenzen ab und stelle das Doppelintegral auf: $\iint_R (1+y^3)\,dA$

b) Berechne das Integral.



Äussere Grenzen

$$\int_{x=0}^{x=2} (\dots)\,dx$$

Innere Grenzen

$$\int_{y=1}^{y=e^x} (1+y^3)\,dy$$

Zusammensetzen

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=1}^{y=e^x} (1+y^3)\,dy\,dx$$

$$\int_0^2 \left[y + \frac{y^4}{4}\right]_{y=1}^{y=e^x} dx$$

$$\int_0^2 \left(e^x + \frac{(e^x)^4}{4}\right) - \left(1 + \frac{(1)^4}{4}\right) dx$$

$$\int_0^2 \left(e^x + \frac{e^{4x}}{4} - \frac{5}{4}\right) dx$$

$$\left[e^x + \frac{e^{4x}}{16} - \frac{5}{4}x\right]_0^2$$

$$\left(e^2 + \frac{e^8}{16} - \frac{5}{4}\cdot 2\right) - \left(e^0 + \frac{e^0}{16} - 0\right)$$

$$\left(e^2 + \frac{e^8}{16} - \frac{5}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{16}\right)$$

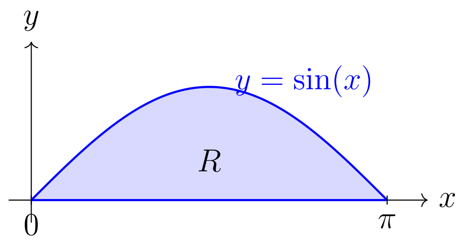
$$e^2 + \frac{e^8}{16} - \frac{5}{2} - \frac{17}{16}$$

$$= e^2 + \frac{e^8}{16} - \frac{57}{16}$$

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=1}^{y=e^x} (1+y^3)\,dy\,dx = e^2 + \frac{e^8}{16} - \frac{57}{16}$$

Übungsaufgabe: Integration über ein Gebiet mit Sinus-Rand

Gegeben ist das Gebiet $R \subset \mathbb{R}^2$.



a) Lies aus der Skizze die Integrationsgrenzen ab und stelle das Doppelintegral auf: $\iint_R (x+y)\,dA$

b) Berechne das Integral, Tipp: $\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$

<u>Äussere Grenzen</u>

$$\int_{x=0}^{x=\pi} (\ldots)\,dx$$

<u>Innere Grenzen</u>

$$\int_{y=0}^{y=\sin(x)} (x+y)\,dy$$

Zusammensetzen

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=\sin(x)} (x+y)\,dy\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin(x)} dx$$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)\,dx$$

$$\underbrace{\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\,dx}_{\text{Partielle Integration}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

$u = x \quad | \quad v' = \sin(x)$

$u' = 1 \quad | \quad v = -\cos(x)$

$$-\left[x \cdot \cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\,dx + \frac{\pi}{4}$$

$$-\pi \cdot \cos(\pi) + \int_0^\pi \cos(x)\,dx + \frac{\pi}{4}$$

$$\pi + \underbrace{\left[\sin(x)\right]_0^\pi}_{0} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{5\pi}{4} + 0$$

$$\boxed{\int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=\sin(x)} (x+y)\,dy\,dx = \frac{5\pi}{4}}$$