Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 7

Extrema unter Nebenbedingungen & Lagrange-Multiplikatoren

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 16.04.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Geometrische Intuition hinter Lagrange-Multiplikatoren
2. Rechenrezept: Lagrange-Multiplikatoren
3. Lagrange-Multiplikatoren mit Ungleichungsnebenbedingungen

1 Geometrische Intuition hinter der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

In vielen Anwendungen sucht man nicht einfach ein Maximum oder Minimum einer Funktion $f(x, y)$ in der ganzen Ebene, sondern nur unter einer **Nebenbedingung**. Das bedeutet: Die Punkte (x, y) dürfen sich nicht frei bewegen, sondern müssen eine zusätzliche Bedingung erfüllen.
Wir betrachten zur Veranschaulichung die Funktion

$$f(x, y) = x + y$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Sichtweise in der xy-Ebene. Die Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad | -x^2$$

$$y^2 = 4 - x^2 \quad | \pm\sqrt{}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Deswegen ist das ein Kreis (mit Radius 2)

beschreibt in der xy-Ebene einen Kreis mit Radius 2.

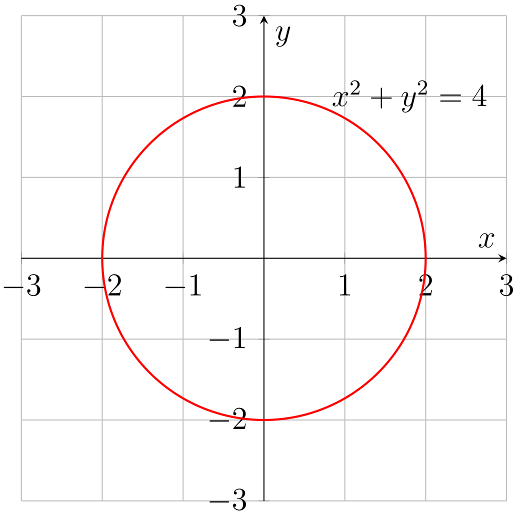


Abbildung 1: Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$ beschreibt in der xy-Ebene einen Kreis mit Radius 2.

Es sind also nicht mehr alle Punkte (x, y) erlaubt, sondern nur noch die Punkte auf diesem Kreis.
Nebenbedingung als Funktion. Für die Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist es oft praktisch, alle Terme auf eine Seite zu bringen. Deshalb schreiben wir die Nebenbedingung als

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Wir definieren also

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4.$$

Dann lautet die Nebenbedingung einfach

$$g(x, y) = 0.$$

Sichtweise im dreidimensionalen Raum. Die Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

hängt nur von x und y ab. Der z-Wert kommt dabei gar nicht vor. Das bedeutet: Immer wenn ein Punkt (x, y) die Bedingung

Beliebiger z-Wert

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

erfüllt, dann ist *jeder* Punkt (x, y, z) mit beliebigem z ebenfalls Teil dieser Menge.
Im xyz-Raum entsteht dadurch ein unendlich hoher Zylinder:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

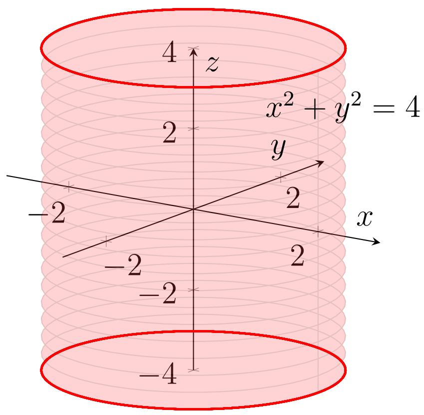


Abbildung 2: Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$ beschreibt im xyz-Raum einen zur z-Achse parallelen Zylinder.

Betrachtet man den Zylinder von oben, so erkennt man wieder den Kreis mit Radius 2 in der xy-Ebene (Abbildung 1).

Graph der Funktion. Der Graph der Funktion $f(x, y) = x + y$ ist die Ebene

$$z = x + y.$$

Betrachtet man nun *gleichzeitig* den Zylinder der Nebenbedingung und den Graphen der Funktion, so schneiden sich diese beiden Flächen in einer **Kurve**.

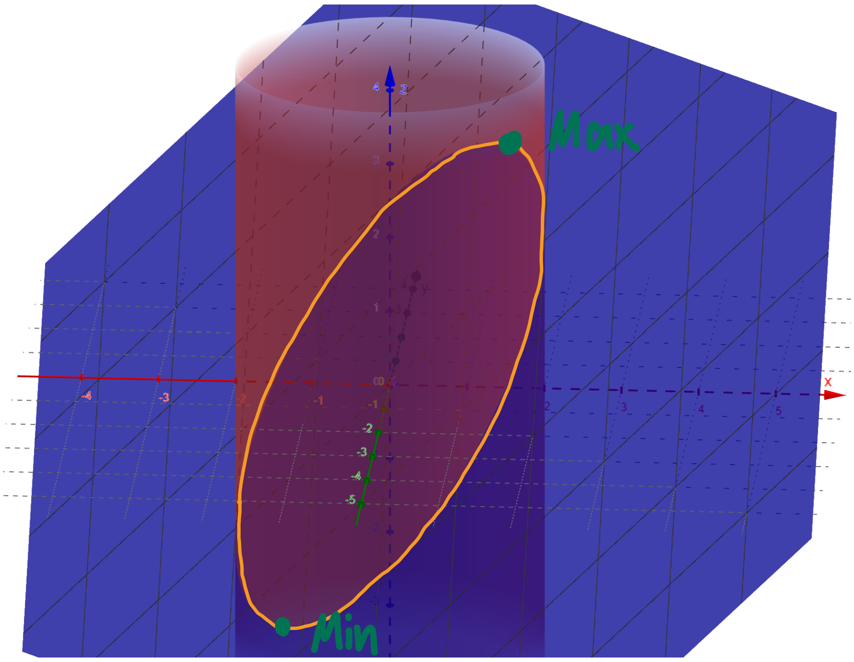


Abbildung 3: Der Graph der Funktion $f(x, y) = x + y$ und der Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ schneiden sich in einer Kurve.

Diese Schnittkurve enthält genau die Punkte des Graphen von f, welche die Nebenbedingung erfüllen.

Wichtige Idee. Wenn wir ein Maximum oder Minimum von f unter der Nebenbedingung suchen, dann dürfen wir uns nicht auf dem ganzen Graphen von f bewegen, sondern nur entlang dieser Schnittkurve.
Gesucht sind also:

$$\begin{aligned} \text{höchster Punkt der Schnittkurve} &\implies \text{Maximum,} \\ \text{tiefster Punkt der Schnittkurve} &\implies \text{Minimum.} \end{aligned}$$

Genau diese Punkte entsprechen dem Maximum bzw. Minimum von f unter der Nebenbedingung.

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist ein systematisches Verfahren, um solche Extrempunkte zu berechnen.

2 Rechenrezept: Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Die geometrische Idee aus dem vorherigen Abschnitt führt auf ein konkretes Rechenverfahren.
Wir möchten Maxima oder Minima einer Funktion

$$f(x, y)$$

unter einer Nebenbedingung bestimmen.
Allgemein kann man eine Nebenbedingung in der Form

$$g(x, y) = c$$

schreiben. In dieser Übungsstunde werden wir jedoch der Einheitlichkeit halber meist alles auf eine Seite bringen und die Nebenbedingung in der Form

$$g(x, y) = 0$$

notieren.

Grundidee. In einem Extrempunkt unter der Nebenbedingung sind die Gradienten von f und g parallel. Deshalb gilt dort

$$\nabla f(x, y) = \lambda \, \nabla g(x, y),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein zusätzlicher Parameter ist. Diesen nennt man **Lagrange-Multiplikator**. Zusammen mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ erhält man also ein Gleichungssystem, das gelöst werden muss.

Gleichungssystem. Für Funktionen in zwei Variablen lautet die Bedingung

$$\nabla f(x, y) = \lambda \, \nabla g(x, y), \qquad g(x, y) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$f_x(x, y) = \lambda \, g_x(x, y),$$

$$f_y(x, y) = \lambda \, g_y(x, y),$$

$$g(x, y) = 0.$$

Wir erhalten also drei Gleichungen für die drei Unbekannten

$$x, \; y, \; \lambda.$$

Wichtig. Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind zunächst nur **Kandidaten** für Extrempunkte. Um zu entscheiden, wo tatsächlich das Maximum bzw. Minimum liegt, muss man die gefundenen Punkte am Ende in die Funktion f einsetzen und die Funktionswerte vergleichen.

Vorgehen in der Praxis.

1. Schreibe die Nebenbedingung in der Form

$$g(x, y) = 0.$$

2. Bestimme die Gradienten

$$\nabla f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \nabla g(x, y).$$

3. Stelle das Gleichungssystem

$$\nabla f(x, y) = \lambda \, \nabla g(x, y)$$

zusammen mit

$$g(x, y) = 0$$

auf.

4. Löse das Gleichungssystem nach x, y und λ. } Vor allem x und y sind wichtig

5. Setze die gefundenen Punkte in f ein und vergleiche die Funktionswerte.

6. Der grösste Funktionswert ist das Maximum, der kleinste das Minimum unter der Nebenbedingung.

Bemerkung. Der Lagrange-Multiplikator λ ist vor allem eine Hilfsvariable, mit der wir das Gleichungssystem aufstellen können. Für die Bestimmung der Extrempunkte sind am Ende die Werte von x und y entscheidend.

Merksatz. Für ein Extremum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sucht man Lösungen von

$$\nabla f(x, y) = \lambda \, \nabla g(x, y) \qquad \text{und} \qquad g(x, y) = 0,$$

und vergleicht danach die Funktionswerte.

Übungsaufgabe: Lagrange-Multiplikator (Gleichungsnebenbedingung)

Bestimme das Maximum und Minimum von

$$f(x,y) = x + y \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \qquad x^2 + y^2 = 4$$

1. Nebenbedingung in Form $g(x,y) = 0$ bringen

$x^2 + y^2 = 4 \quad /-4$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$

$\underline{g(x,y) = x^2 + y^2 - 4}$

2. Gradienten bestimmen

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

3. & 4. Lagrange Gl. aufstellen & lösen

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ und $x^2 + y^2 - 4 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1 = 1 \\ 2\lambda x = 2\lambda y \quad /:2\lambda \end{array}$

$\underline{\underline{x = y}}$

$x^2 + x^2 - 4 = 0 \quad /+4$

$2x^2 = 4 \quad /:2$

$x^2 = 2 \quad /\pm\sqrt{\ }$

$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{2}}}$

$\underline{\underline{y_{1,2} = \pm\sqrt{2}}}$

$\left.\right\}$ 4 Kombinationen

$(\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$(-\sqrt{2},\sqrt{2}), (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

5. & 6. Kritische Punkte in $f(x,y)$ einsetzen

$f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow$ Max. bei $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$

$f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

$f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

$f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} \rightarrow$ Min. bei $P(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

3 Spezialfall: Ungleichungsnebenbedingung

Bisher haben wir Nebenbedingungen der Form

$$g(x, y) = 0$$

betrachtet. In diesem Fall sucht man Extrempunkte auf einer Kurve.
Oft hat man jedoch eine Ungleichungsnebenbedingung, zum Beispiel

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Dann betrachtet man nicht nur eine Kurve, sondern ein ganzes Gebiet:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

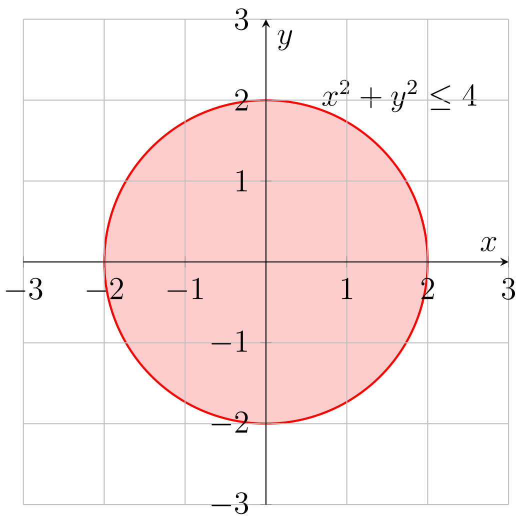


Abbildung 4: Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 4$ beschreibt in der xy-Ebene eine Kreisscheibe mit Radius 2.

Wichtige Idee. Bei einer Ungleichungsnebenbedingung können Maximum und Minimum

- im **Inneren** des Gebiets oder
- auf dem **Rand** des Gebiets

liegen.

Man muss deshalb **beides** untersuchen.

Vorgehen in der Praxis.

1. Untersuche das **Innere** des Gebiets, also hier

$$x^2 + y^2 < 4.$$

   Bestimme dort die kritischen Punkte von f durch

$$\nabla f(x, y) = 0.$$

   Setze diese Punkte in f ein.

2. Untersuche den **Rand** des Gebiets, also hier

$$x^2 + y^2 = 4.$$

   Auf dem Rand kann man wieder die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

3. Falls das Gebiet Ecken oder besondere Randpunkte besitzt, müssen auch diese zusätzlich geprüft werden.

4. Vergleiche am Schluss alle gefundenen Funktionswerte.

5. Der grösste Funktionswert ist das Maximum auf dem Gebiet, der kleinste das Minimum auf dem Gebiet.

Merksatz. Bei einer Ungleichungsnebenbedingung genügt es nicht, nur den Rand zu untersuchen. Man muss immer

$$\textbf{Inneres} \quad + \quad \textbf{Rand}$$

betrachten.

Wichtig. Ein lokales Maximum im Inneren ist nicht automatisch das Maximum auf dem gesamten Gebiet. Es kann sein, dass auf dem Rand noch grössere Funktionswerte auftreten. Dasselbe gilt analog für Minima.
Umgekehrt ist auch ein lokales Maximum auf dem Rand nicht automatisch das Maximum auf dem gesamten Gebiet. Es kann nämlich im Inneren noch Punkte geben, an denen die Funktion grössere Werte annimmt. Analog dazu kann auch ein lokales Minimum auf dem Rand grösser sein als ein Minimum im Inneren.

Deshalb muss man bei einer Ungleichungsnebenbedingung immer sowohl das **Innere** als auch den **Rand** untersuchen und am Schluss alle gefundenen Funktionswerte vergleichen.

Bemerkung. Für ein abgeschlossenes und beschränktes Gebiet wie

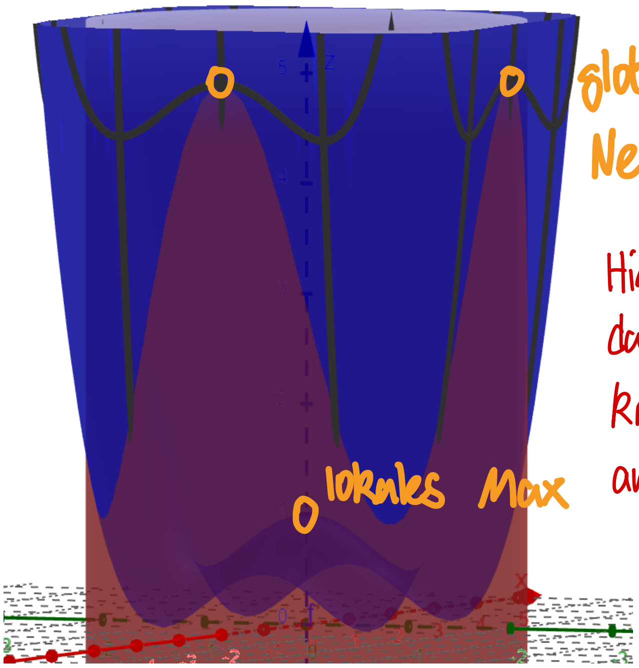
$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

werden Maximum und Minimum tatsächlich angenommen (Satz von Minimum und Maximum, Weierstrass).

Übungsaufgabe: Lagrange-Multiplikator (Ungleichungs-NB)

Bestimme das Maximum und Minimum von

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 \qquad \text{auf dem Gebiet} \qquad x^2 + y^2 \leq 4$$



Hier will ich euch zeigen das man schön alle kritischen Punkte analysieren muss!

Abbildung 5: Die blaue Fläche zeigt den Graphen der Funktion, der rote Zylinder beschreibt den Rand der Nebenbedingung. Die Abbildung veranschaulicht, dass Extremwerte auf dem Gebiet sowohl im Inneren als auch auf dem Rand liegen können. Sieht bisschen aus wie eine PET-Flasche von unten.

1. Innere kritische Punkte

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x + 2x^3 \\ -2y + 2y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(x^2-1) \\ 2y(y^2-1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} 2x(x^2-1) = 2x(x+1)(x-1) = 0 \longrightarrow & x_{1,2,3} = 0, 1, -1 \\ 2y(y^2-1) = 2y(y+1)(y-1) = 0 \longrightarrow & y_{1,2,3} = 0, 1, -1 \end{cases}$$

Kandidaten : $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1)$

$f(0,0) = 1 \longrightarrow$ Ein (inneres) Maximum

$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\pm 1, \pm 1) = 1 - 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow 4$ (innere) Minima

2. Kritische Punkte auf dem Rand

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \longrightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

$$2x(x^2-1) = \lambda 2x \quad /:2$$

$$x(x^2-1) = \lambda x \quad /-\lambda x$$

$$\underbrace{x(x^2-1-\lambda)} = 0 \quad \xrightarrow[\text{für } y]{\text{äquivalent}} \quad \underbrace{y(y^2-1-\lambda)} = 0$$

Fall 1: $x = 0$

NB: $0^2 + y^2 = 4 \quad / \pm\sqrt{\ }$

$y_{1,2} = \pm 2$

Kandidaten $(0, \pm 2)$

Fall 2: $y = 0$

NB: $x^2 + 0^2 = 4 \quad / \pm\sqrt{\ }$

$x_{1,2} = \pm 2$

Kandidaten $(0, \pm 2)$

Fall 3: $x \neq 0$ und $y \neq 0$

$$\underbrace{x}_{\neq 0}\underbrace{(x^2-1-\lambda)}_{=0} = 0 \qquad \underbrace{y}_{\neq 0}\underbrace{(y^2-1-\lambda)}_{=0} = 0$$

$$x^2-1-\lambda = 0 \quad /+\lambda \qquad y^2-1-\lambda = 0 \quad /+\lambda$$

$$x^2-1 = \lambda \qquad y^2-1 = \lambda$$

$$\lambda = \lambda$$

$$x^2-1 = y^2-1 \quad /+1$$

$$\underline{x^2 = y^2}$$

NB: $x^2+y^2 = 4$

$$x^2+x^2 = 4$$

$$2x^2 = 4 \quad /:2$$

$$x^2 = 2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{2}} \xrightarrow{x^2=y^2} \underline{y_{1,2} = \pm\sqrt{2}}$$

Kandidaten: $(\sqrt{2},\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

3. Extrempunkte unter der Nebenbedingung

Innere Region

Vergleiche alle Max./Min. Werte miteinander um globales Max./Min. zu finden

$f(0,0) = 1 \rightarrow$ Ein Lokales Max.

$f(\pm1,\pm1) = 0 \rightarrow$ Vier Globale Min.

Rand

$f(\pm\sqrt{2},0) = f(0,\pm\sqrt{2}) = 5 \rightarrow$ Vier Globale Max.

$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}) = 1 \rightarrow$ Vier Lokale Min.

$\rightarrow$ Die globalen Minima (unter der NB) liegen im Inneren des Gebiets aber die globalen Maxima (unter NB) liegen auf der Randkurve!

4 Alternative Methode am Rand: Einsetzen

Neben der Methode der Lagrange-Multiplikatoren gibt es in manchen Aufgaben noch einen direkteren Weg, um Extremwerte auf dem Rand einer Nebenbedingung zu bestimmen.

Grundidee. Wenn sich die Randgleichung der Nebenbedingung einfach umformen lässt, kann man diese direkt in die Funktion f einsetzen. Dadurch reduziert sich das Problem auf eine Optimierungsaufgabe in nur noch einer Variablen.

Angenommen, der Rand des Gebiets ist durch eine Gleichung der Form

$$g(x, y) = 0$$

gegeben. Falls man daraus zum Beispiel einen Ausdruck für y oder für y^2 gewinnen kann, so kann man diesen in $f(x, y)$ einsetzen. Auf diese Weise erhält man eine neue Funktion in nur noch einer Variablen.

Typische Situation. Ist zum Beispiel der Rand durch

$$x^2 + y^2 = 1$$

gegeben, so folgt

$$y^2 = 1 - x^2.$$

Wenn in der Funktion $f(x, y)$ nur der Ausdruck y^2 vorkommt, kann man dies direkt einsetzen und erhält eine eindimensionale Funktion.

Vorgehen in der Praxis.

1. Schreibe die Randgleichung der Nebenbedingung auf.
2. Forme sie nach einer geeigneten Variablen oder einem geeigneten Ausdruck um.
3. Setze diesen Ausdruck in $f(x, y)$ ein.
4. Erhalte so eine Funktion in einer Variablen.
5. Untersuche diese Funktion auf dem entsprechenden Intervall mit den Methoden aus Analysis A.
6. Vergleiche die Funktionswerte der gefundenen Kandidaten.

Bemerkung. Diese Einsetzmethode ist besonders dann nützlich, wenn sich die Nebenbedingung einfach umformen lässt und das Einsetzen die Rechnung deutlich vereinfacht.

Wichtig. Diese Methode ist keine Konkurrenz zur Methode der Lagrange-Multiplikatoren, sondern eine mögliche Abkürzung in speziellen Fällen. Wenn sich die Nebenbedingung nicht einfach auflösen lässt, ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren meist systematischer.

Übungsaufgabe: Gleichungsnebenbedingung mit Ellipse

Bestimme Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^2 + 1 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^2 + 1$, NB: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad / - \frac{x^2}{4}$

$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \quad / \pm\sqrt{\ }$

$f_{Rand}(x) = x^4 - 2x^2 - \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + 1$

$\underline{f_{Rand}(x) = x^4 - \frac{7}{4}x^2}$

Jetzt Definitionsbereich von $f_{Rand}(x)$ rausfinden durch NB:

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad / \cdot 4$

$x^2 + 4y^2 = 4 \quad / \pm\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2 + 4y^2} = \pm 2$

$y = 0 \longrightarrow \sqrt{x^2} = \pm 2 \longrightarrow x = \pm 2$

$x = 0 \longrightarrow \sqrt{4y^2} = \pm 2 \longrightarrow 2y = \pm 2 \quad /:2 \longrightarrow y = \pm 1$

Bei der Ellipse sind die Fkt.-Werte $x \in [-2,2]$ und $y \in [-1,1]$.

Also $f_{Rand}(x)$ hat $x \in [-2,2]$

$f_{Rand}(x) = x^4 - \frac{7}{4}x^2$

$f'_{Rand}(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x$

$f'_{Rand}(x) = 0$

$0 = x\left(4x^2 - \frac{7}{2}\right)$

$x_1 = 0$

Mitternachtsformel:

$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$

Zusätzlich noch Randpunkte prüfen: $x_{4,5} = \pm 2$

Alle Fkt.-Werte vergleichen

$y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

$f_{Rand}(0) = 0$

$f_{Rand}(\pm 2) = 9 \longrightarrow$ Max bei $x = \pm 2 \xrightarrow{\text{jeweilige } y} y = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{4}} = 0$

$f_{Rand}\left(\pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = -\frac{49}{64} \longrightarrow$ Min bei $x = \pm\sqrt{\frac{7}{8}} \xrightarrow{\text{jeweilige } y} y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{8}$

Globales Maximum bei $P(\pm 2, 0)$ mit $f(P) = 9$

Globales Minimum bei $P\left(\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \pm\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$ mit $f(P) = -\frac{49}{64}$