

---

# Mathematik II: Analysis B

---

## Übungsstunde 6

*Repetition Analysis B*

Visva Loganathan | [vloganathan@student.ethz.ch](mailto:vloganathan@student.ethz.ch) | 02.04.2026

*Material:* [visva-loganathan.ch](http://visva-loganathan.ch)

## Überblick dieser Übungsstunde

1. Definitionsbereich
2. Partielle Ableitungen bei invarianten Funktionen
3. Richtungsableitung
4. Tangentialebene und totales Differential
5. Kritische Punkte und Klassifikation

# 1 Definitionsbereich

**Notation.** Den Definitionsbereich immer in Mengenschreibweise angeben:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Bedingungen}\} \quad \text{oder} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{Bedingungen}\}.$$

Nicht nur die Bedingung hinschreiben (z. B. " $x \neq 0$ "), sondern die ganze Menge.

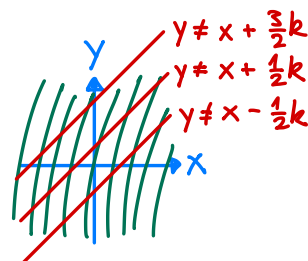
**Hinweis.** Typische Bedingungen:

Nenner  $\neq 0$ ,  $\sqrt{\text{Argument}}$  : Argument  $\geq 0$ ,  $\ln(\text{Argument})$  : Argument  $> 0$ .

## Übungsaufgaben: Definitionsbereich

Bestimme jeweils den **Definitionsbereich** der folgenden Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

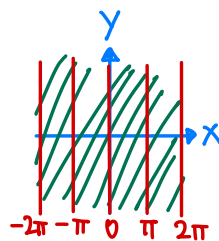
1.  $f(x, y) = \tan(y - x) = \frac{\sin(y - x)}{\cos(y - x)}$   
 $\cos(y - x) \neq 0$  / arccos  
 $y - x \neq \pi(k + \frac{1}{2})$  / +x  
 $y \neq x + \pi(k + \frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}$



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \pi(k + \frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}\}$

2.  $f(x, y) = \ln(|\sin(x)|^y)$

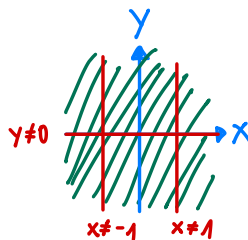
$|\sin(x)|^y > 0$  für  $\forall y \in \mathbb{R}$   
 $\ln(|\sin(x)|^y) = y \cdot \ln(|\sin(x)|)$   
 $\sin(x) \neq 0$  / arcsin



$x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow$   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3.  $f(x, y) = e^{\frac{y^2}{y(x^2 - 1)}} = \exp\left(\frac{y^2}{y(x^2 - 1)}\right)$

$y(x^2 - 1) \neq 0$   
 $y \neq 0, x^2 - 1 \neq 0$  / +1  
 $x^2 \neq 1$  / ±1  
 $x_{1/2} \neq \pm 1$



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq \pm 1, y \neq 0\}$

Zusatz: Zeichne die Definitionsbereiche auf

## 2 Partielle Ableitungen bei invarianten Funktionen

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *invariant unter der Vertauschung von  $x$  und  $y$* , wenn gilt:

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \text{für alle } (x, y) \in D$$

**Hinweis.** Statt „invariant unter der Vertauschung von  $x$  und  $y$ “ könnte man auch „symmetrisch bezüglich der Vertauschung von  $x$  und  $y$ “ sagen. Wichtig ist jedoch, dass damit nicht die Symmetrie gerade/ungerade aus Analysis A gemeint ist, sondern die Eigenschaft, dass sich die Variablen  $x$  und  $y$  vertauschen lassen. Um Verwechslungen zu vermeiden, verwende ich hier konsequent den Begriff „invariant“.

In diesem Fall kann man die beiden partiellen Ableitungen oft besonders effizient miteinander in Beziehung setzen. Es gilt nämlich:

$$f_x(x, y) = f_y(y, x) \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = f_x(y, x).$$

**Interpretation.** Ist  $f$  invariant, so erhält man die Ableitung nach  $y$  aus der Ableitung nach  $x$ , indem man anschliessend  $x$  und  $y$  vertauscht (und umgekehrt).

**Wichtig.** Dies ist *keine allgemeine Regel* für beliebige Funktionen, sondern ein nützlicher Zusatztrick, der nur für Funktionen gilt, welche invariant unter der Vertauschung von  $x$  und  $y$  sind.

**Beispiel.** Die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) \sin(xy)$$

ist invariant, da

$$f(y, x) = \ln(y^2 + x^2 + 1) \sin(yx) = \ln(x^2 + y^2 + 1) \sin(xy) = f(x, y).$$

**Merksatz.** Bei Funktionen, welche invariant unter der Vertauschung von  $x$  und  $y$  sind, gilt:

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \implies \quad f_x(x, y) = f_y(y, x), \quad f_y(x, y) = f_x(y, x).$$

**Bemerkung.** Für den durch den Funktionsterm vorgegebenen Definitionsbereich gilt: Bleibt der Funktionsterm unter  $x \leftrightarrow y$  unverändert, so bleibt auch der Definitionsbereich unter  $x \leftrightarrow y$  unverändert.

## Übungsaufgaben: Partielle Ableitungen

1. Bestimme  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  für

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) \sin(xy). \text{ Invarianz: } f(x, y) = f(y, x)$$

Produktregel

$$u = \ln(x^2 + y^2 + 1) \quad | \quad v = \sin(xy)$$
$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \quad | \quad v_x = y \cos(xy)$$
$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \sin(xy) + y \cos(xy) \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

↓ Invarianz

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \sin(xy) + x \cos(xy) \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

2. Bestimme  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  für

$$f(x, y) = e^{x^2 + y^2} \sqrt{x^3 + y^3}. \text{ Invarianz: } f(x, y) = f(y, x)$$

Produktregel

$$u = e^{x^2 + y^2} \quad | \quad v = \sqrt{x^3 + y^3} = (x^3 + y^3)^{1/2}$$
$$u_x = 2x e^{x^2 + y^2} \quad | \quad v_x = \frac{1}{2} (x^3 + y^3)^{-1/2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$$
$$f_x(x, y) = 2x e^{x^2 + y^2} \sqrt{x^3 + y^3} + e^{x^2 + y^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$$
$$f_x(x, y) = x e^{x^2 + y^2} \cdot \left( 2\sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \right)$$

↓ Invarianz

$$f_y(x, y) = y e^{x^2 + y^2} \cdot \left( 2\sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3y}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \right)$$

### 3 Richtungsableitungen

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $P = (x_0, y_0)$  ein Punkt und  $\vec{r} \neq \vec{0}$  ein Richtungsvektor. Der zugehörige normierte Richtungsvektor ist

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}.$$

Die Richtungsableitung von  $f$  in  $P$  in Richtung von  $\vec{r}$  ist gegeben durch

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

**Vorgehen.**

1. Berechne den Gradienten  $\nabla f(x, y)$ .
2. Normiere den Richtungsvektor:  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ .
3. Werte den Gradienten im Punkt  $P$  aus.
4. Berechne das Skalarprodukt  $D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$ .

**Bemerkung.** Die Reihenfolge der letzten beiden Schritte ist nicht entscheidend: Nachdem der Gradient berechnet und der Richtungsvektor normiert wurde, kann man entweder zuerst  $\nabla f(P)$  auswerten oder direkt das Skalarprodukt berechnen.

## Übungsaufgabe: Richtungsableitung

Bestimme die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $P$  in Richtung von  $\vec{r}$ :

$$f(x, y) = e^{xy} \ln(x + y + 2), \quad P = (0, 1), \quad \vec{r} = (3, -4).$$

### Richtungsvektor normieren

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

### Gradient berechnen

$$f(x, y) = e^{xy} \ln(x+y+2) = f(y, x) \rightarrow \text{invariant}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = e^{xy} \\ u_x = ye^{xy} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} v = \ln(x+y+2) \\ v_x = \frac{1}{x+y+2} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = e^{xy} \left( y \ln(x+y+2) + \frac{1}{x+y+2} \right) \\ f_y(x, y) = e^{xy} \left( x \ln(x+y+2) + \frac{1}{x+y+2} \right) \end{array} \right\} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

### Gradient im Punkt $P(0, 1)$ auswerten

$$\nabla f(0, 1) = e^{0 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot \ln(0+1+2) + \frac{1}{0+1+2} \\ 0 \cdot \ln(0+1+2) + \frac{1}{0+1+2} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \ln(3) + \frac{1}{3} \\ 0 + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} \ln(3) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

### Skalarprodukt berechnen

$$D_{\vec{u}} f(0, 1) = \begin{pmatrix} \ln(3) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \left( \ln(3) + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{5} \left( \frac{1}{3} \right)$$

$$\underline{D_{\vec{u}} f(0, 1) = \frac{3}{5} \ln(3) - \frac{1}{15}}$$

## 4 Tangentialebene und totales Differential

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.

**Tangentialebene im Punkt**  $(x_0, y_0)$ :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Totales Differential im Punkt**  $(x_0, y_0)$ :

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy.$$

Für kleine Änderungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gilt näherungsweise

$$\Delta f \approx df = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y.$$

**Zusammenhang.** Tangentialebene und totales Differential beschreiben dieselbe lineare Approximation. Hat man die Tangentialebene

$$z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

so folgt sofort

$$df = a dx + b dy.$$

### Übungsaufgabe: Tangentialebene und totales Differential

Gegeben sei  $f(x, y) = x^2y + y^2$ .

1. Bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(1, 2)$ .
2. Lies daraus das totale Differential  $df$  im Punkt  $(1, 2)$  ab.

The handwritten solution on a grid background shows the following steps:

$$f(1,2) = 1^2 \cdot 2 + 2^2 = 6$$
$$f_x(x,y) = 2xy \rightarrow f_x(1,2) = 4$$
$$f_y(x,y) = x^2 + 2y \rightarrow f_y(1,2) = 5$$

Arrows point from the partial derivative results to the tangent plane equation:

$$\underline{z = 6 + 4(x-1) + 5(y-2)}$$

To the right of this equation is the label "Tangentialebene".

An arrow points from the tangent plane equation to the total differential:

$$\underline{df = 4dx + 5dy}$$

To the right of this equation is the label "Totales Differential".

## 5 Kritische Punkte und Klassifikation

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

**Kritische Punkte.** Ein Punkt  $P = (x_0, y_0)$  heisst kritischer Punkt, wenn

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Äquivalent dazu ist

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

**Hesse-Matrix.** Zur Klassifikation eines kritischen Punktes verwendet man die Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

**Klassifikation.** Für einen kritischen Punkt  $P = (x_0, y_0)$  setze

$$D = \det(H_f(x_0, y_0)) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

Dann gilt:

$$D > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum,}$$

$$D > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum,}$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt,}$$

$$D = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage möglich.}$$

**Vorgehen.**

1. Berechne  $f_x$  und  $f_y$ .
2. Bestimme die kritischen Punkte durch  $f_x = 0$  und  $f_y = 0$ .
3. Berechne  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ .
4. Werte die Hesse-Matrix im kritischen Punkt aus und berechne  $D$ .
5. Klassifiziere den Punkt.

**Hinweis.** Siehe Analysis B ÜS 5 für ein übersichtliches Flussdiagramm zur Klassifikation kritischer Punkte.

## Übungsaufgabe: Kritische Punkte und Klassifikation

Bestimme alle kritischen Punkte von  $f$  und klassifiziere sie mit Hilfe der Hesse-Matrix:

$$f(x, y) = e^x(x-1)^2 + y^2.$$

$f_x$

$$\left. \begin{array}{l} u = e^x \\ u_x = e^x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} v = (x-1)^2 \\ v_x = 2(x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_x(x, y) = e^x(x-1)^2 + e^x 2(x-1) \\ f_x(x, y) = e^x(x-1) \cdot ((x-1) + 2) \\ f_x(x, y) = e^x(x-1) \cdot (x+1) = 0 \end{array}$$

Nie 0  $x_1 = 1$   $x_2 = -1$   
( $e^x > 0$  für  $\forall x \in \mathbb{R}$ )

$f_y$

$$f_y(x, y) = 2y = 0 \} y = 0$$

Kritische Punkte  $P_1(1, 0)$  und  $P_2(-1, 0)$

Hesse-Matrix & Determinante berechnen

$$f_x(x, y) = e^x(x-1)(x+1) = e^x(x^2-1) \quad \left. \begin{array}{l} u = e^x \\ u' = e^x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} v = x^2-1 \\ v' = 2x \end{array} \right\}$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x(x^2 + 2x - 1)$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 2$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(x^2 + 2x - 1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(x, y)) = e^x(x^2 + 2x - 1) \cdot 2 - 0 \cdot 0$$

$$D_f(x, y) = 2e^x(x^2 + 2x - 1)$$

$$D_f(1, 0) = 2e^1(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 4e > 0 : P_1(1, 0) \text{ ist ein Extremum}$$

$$f_{xx}(1, 0) = e^1(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 2e > 0 : \underline{P_1(1, 0) \text{ ist ein lokales Minimum}}$$

$$D_f(-1, 0) = 2e^{-1}((-1)^2 + 2(-1) - 1) = -4e^{-1} < 0 : \underline{P_2(-1, 0) \text{ ist ein Sattelpunkt}}$$