Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 5

Kritische Punkte & Klassifikation mit Hesse-Matrix

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 26.03.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Kritische Punkte

2. Klassifikation kritischer Punkte & Hesse-Matrix

1 Kritische Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Gradient

Der Gradient von f ist definiert als

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Der Gradient beschreibt die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion.

Kritische Punkte

Ein Punkt (x_0, y_0) heisst **kritischer Punkt**, wenn

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

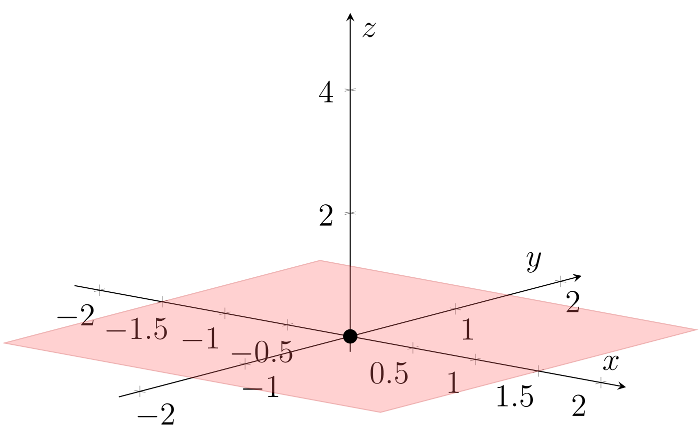
Dies ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.$$

Vorgehen

Um kritische Punkte zu bestimmen:

1. Berechne die partiellen Ableitungen f_x und f_y.
2. Setze den Gradienten gleich Null: $\nabla f(x, y) = 0$.
3. Löse das entstehende Gleichungssystem, um die kritischen Punkte (x, y) zu erhalten.



Lokales Minimum bei $P = (0, 0)$ und $\nabla f(0, 0) = 0$

Übungsaufgaben: Kritische Punkte

Bestimme jeweils alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y$

$f_x = 2x + 2$
$0 = 2x + 2 \quad | -2$
$2x = -2 \quad | :2$
$x = -1$

$f_y = 2y - 4$
$0 = 2y - 4 \quad | +4$
$2y = 4 \quad | :2$
$y = 2$

$P(-1, 2)$

2. $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 + 4y$

$f_x = 3x^2 - 3$
$0 = 3x^2 - 3 \quad | +3$
$3x^2 = 3 \quad | :3$
$x^2 = 1 \quad | \pm\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 1$

$f_y = 2y + 4$
$0 = 2y + 4 \quad | -4$
$2y = -4 \quad | :2$
$y = -2$

$P_1(1, -2)$ und $P_2(-1, -2)$

3. $f(x, y) = x^2 y - y$

$f_x = 2xy$
$0 = 2xy$

$f_y = x^2 - 1$
$0 = x^2 - 1 \quad | +1$
$x^2 = 1 \quad | \pm\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 1$

Damit $2xy = 0$ für $x = \pm 1$ MUSS $y = 0$ sein!

$P_1(1, 0)$ und $P_2(-1, 0)$

4. $f(x, y) = e^{2x} + y^2 - 2y$

$f_x = 2e^{2x}$
$\underbrace{0 = 2e^{2x}}$

Exponentialfkt. sind nie 0

$f_y = 2y - 2$
$0 = 2y - 2 \quad | +2$
$2y = 2 \quad | :2$
$y = 1$

Keine kritischen Punkte vorhanden

5. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2x + 6y^2$

$f_x = 2x - 4y + 2$
$0 = 2x - 4y + 2 \quad | +4y - 2$
$2x = 4y - 2 \quad | :2$
$x = 2y - 1$

$f_y = -4x + 12y$
$0 = -4x + 12y \quad | +4x$
$4x = 12y \quad | :4$
$x = 3y$

$x = x$
$2y - 1 = 3y \quad | -2y$
$-1 = y$
$x = 3 \cdot -1$
$x = -3$

$P(-3, -1)$

6. $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$

$f_x = -\sin(x)$
$0 = -\sin(x) \quad | \cdot(-1)$
$\sin(x) = 0 \quad | \arcsin$
$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f_y = \cos(y)$
$0 = \cos(y) \quad | \arccos$
$y = (m + \frac{1}{2})\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

$P_{k,m} = \left(k\pi, (m + \frac{1}{2})\pi\right) \quad k, m \in \mathbb{Z}$

2 Klassifikation kritischer Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und (x_0, y_0) ein kritischer Punkt, d.h.

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0.$$

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist die Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen von f. Sie beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion in der Umgebung eines Punktes.
Die Hesse-Matrix von f im Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Vereinfachte Notation

Schreibe

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad a = f_{xx}(x_0, y_0),\ b = f_{xy}(x_0, y_0),\ c = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Dann gilt für die Determinante

$$\det(H) = ac - b^2.$$

Klassifikation

Setze

$$D = \det(H) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - \big(f_{xy}(x_0, y_0)\big)^2.$$

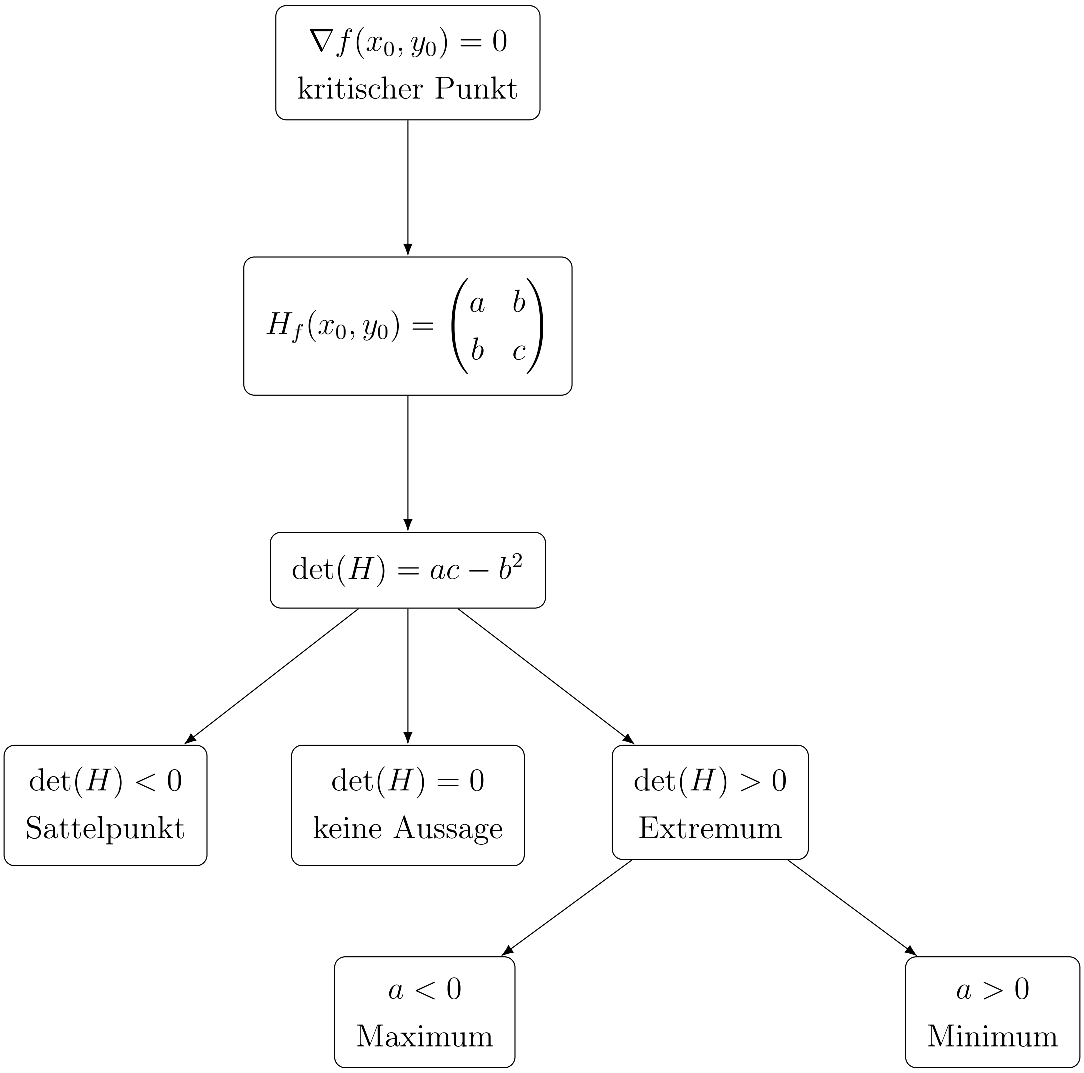
Dann gilt:

- $D > 0$ und $a > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum
- $D > 0$ und $a < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
- $D < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
- $D = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Vorgehen

1. Bestimme die kritischen Punkte $P(x_0, y_0)$ durch $\nabla f = 0$.
2. Berechne die zweiten partiellen Ableitungen.
3. Werte die Hesse-Matrix im Punkt (x_0, y_0) aus.
4. Berechne $D = \det(H_f(x_0, y_0))$.
5. Klassifiziere den Punkt.

Klassifikation kritischer Punkte als Flussdiagramm



Übungsaufgaben: Klassifikation kritischer Punkte

Klassifiziere die kritischen Punkte der folgenden Funktionen mithilfe der Hesse-Matrix.

Aufgabe 1 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y, \qquad P = (-1, 2)$

$f_x = 2x + 2$

$f_y = 2y - 4$

$f_{xx} = 2$

$f_{xy} = 0$

$f_{yy} = 2$

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \det(H_f) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 2$

$D = 4 > 0 \longrightarrow$ Extremum

$a = f_{xx} = 2 > 0 \longrightarrow$ Minimum

<u>(Lokales) Minimum bei $P(-1, 2)$</u>

Aufgabe 2 $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 + 4y, \qquad P_1 = (1, -2),\ P_2 = (-1, -2)$

$f_x = 3x^2 - 3$

$f_y = 2y + 4$

$f_{xx} = 6x$

$f_{xy} = 0$

$f_{yy} = 2$

$H_f = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \det(H_f) = 6x \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 12x$

$D_1(1,-2) = 12 \cdot 1 = 12 > 0 \longrightarrow$ Extremum

$a_1 = f_{xx}(1,-2) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \longrightarrow$ Minimum

$D_2(-1,-2) = 12 \cdot (-1) = -12 < 0 \longrightarrow$ Sattelpunkt

(Lokales) Minimum bei $P_1(1,-2)$ und Sattelpunkt bei $P_2(-1,-2)$

Aufgabe 3 $\quad f(x,y) = x^2 - 4xy + 2x + 6y^2, \qquad P = (-3,-1)$

$f_x = 2x - 4y + 2$

$f_y = 12y - 4x$

$f_{xx} = 2$

$f_{xy} = -4$

$f_{yy} = 12$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$D = \det(H_f) = 2 \cdot 12 - (-4) \cdot (-4) = 24 - 16 = 8$

$D = 8 > 0 \longrightarrow$ Extremum

$a = f_{xx}(-3,-1) = 2 > 0 \longrightarrow$ Minimum

(Lokales) Minimum bei $P(-1, 2)$

Spezialaufgabe $\quad f(x,y) = \cos(x) + \sin(y), \qquad P_{k,m} = \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right), \qquad k, m \in \mathbb{Z}$

Klassifiziere die kritischen Punkte $P_{k,m}$ in Abhängigkeit von k und m. *Hinweis: Untersuche die Parität von k und m.*

$f_x = -\sin(x)$

$f_y = \cos(y)$

$f_{xx} = -\cos(x)$

$f_{xy} = 0$

$f_{yy} = -\sin(y)$

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{pmatrix}$$

$D = \det(H_{f(x,y)}) = (-\cos(x)) \cdot (-\sin(y)) - 0 \cdot 0$

$D = \cos(x)\sin(y)$

$D(k\pi, (m+\frac{1}{2})\pi) = \cos(k\pi) \cdot \sin((m+\frac{1}{2})\pi) = (-1)^k \cdot (-1)^m = (-1)^{k+m}$

$$\underline{\underline{D(P_{k,m}) = (-1)^{k+m}}}$$

<u>Fallunterscheidung nach Parität</u>

k & m gleiche Parität (beide gerade oder beide UNgerade): $D = 1 > 0 \longrightarrow$ Extremum

k & m unterschiedliche Parität: $D = -1 < 0 \longrightarrow$ Sattelpunkt

k & m gerade: $a = f_{xx}(k\pi) = -(-1)^k = -(1) = -1 < 0 \longrightarrow$ Maximum

k & m UNgerade: $a = f_{xx}(k\pi) = -(-1)^k = -(-1) = 1 > 0 \longrightarrow$ Minimum

<u>Zusammengefasst</u> $\rightarrow$ Punkt $P_{k,m}(k\pi, (m+\frac{1}{2})\pi)$ ist:

k & m gerade : lokales Maximum

k & m UNgerade : lokales Minimum

k & m verschiedene Parität: Sattelpunkt