Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 4

Anwendung totales Differential, Multivariable Taylorreihe & Offene Mengen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 19.03.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Anwendung totales Differential
2. Taylorreihe für Funktionen mehrerer Variablen
3. Offene Mengen

1 Anwendungen totales Differential

Sei $f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion. Das **totale Differential** von f ist gegeben durch

$$df = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy$$

Dabei sind f_x und f_y die partiellen Ableitungen von f nach x bzw. y, und dx, dy beschreiben kleine Änderungen der Variablen.

Das totale Differential liefert eine lineare Approximation der Funktionsänderung:

$$\Delta f \approx df$$

Übungsaufgaben: Totales Differential

Aufgabe 1 (Kugel & Sternstruktur, totales Differential mit einer Variablen)
Eine Kugel hat das Volumen

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

a) Bestimme mit Hilfe des Differentials das Volumenelement dV für eine kleine Änderung des Radius dr.

b) Eine Kugel hat einen Radius von $r = 10$ cm. Der Radius wird bei der Herstellung um 0.1 cm grösser. Verwende das Differential, um näherungsweise die Änderung des Volumens zu bestimmen.

c) Ein Stern wird näherungsweise als Kugel betrachtet. Die Masse innerhalb eines Radius r sei $M(r)$, und die Dichte sei eine radiusabhängige Funktion $\rho(r)$. In realen Sternen ist die Dichte nämlich nicht konstant: Im Sternkern ist die Materie meist deutlich dichter als in den äusseren Schichten (Sternmantel). Die genaue Dichteverteilungsfunktion hängt vom Typ und Entwicklungsstadium des Sterns ab.

   Die Masse einer dünnen Kugelschale der Dicke dr ist gegeben durch

   $$dM = \rho(r)\, dV$$

   Zeige, dass daraus folgt

   $$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

a) Volumenelement dV

$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$dV = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot dr$

$$dV = 4\pi r^2 \cdot dr$$

b) ΔV bestimmen

$r = 10cm, \; dr = 0.1cm$

$dV = 4\pi r^2 \, dr$

$dV = 4\pi (10cm)^2 \cdot 0.1cm$

$dV = 40\pi \, cm^3 \approx 125.6 cm^3$

$\Delta V \approx dV$

$$\Delta V \approx 125.6 cm^3$$

c) Masseverteilung Stern

$dV = 4\pi r^2 dr$

$dM = \rho(r) \, dV$

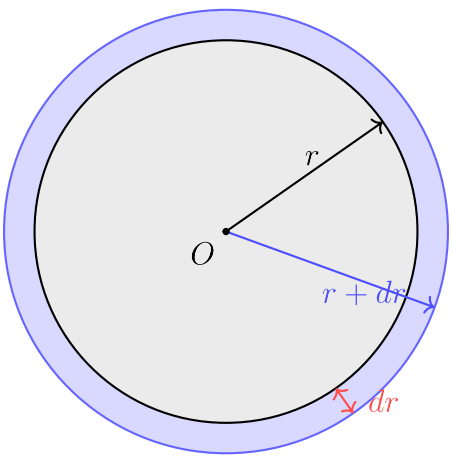
$dM = 4\pi r^2 \rho(r) \, dr \quad /: dr$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$\downarrow$

Je nach Stern hat man eine andere Dichtefunktion $\rho(r)$ und kann diese einsetzen und die ODE lösen um die Funktion $M(r)$ vom jeweiligen Stern zu finden!

dünne Kugelschale



Aufgabe 2 (Totales Differential mit zwei Variablen)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \ln(xy) = \frac{x^2}{y} + \ln(x) + \ln(y)$$

Bestimme das **totale Differential** df. *Hinweis*: Vereinfache zuerst den Logarithmus.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{y} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + y}{xy}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{y} = \frac{y - x^2}{y^2}$$

$$\underline{\underline{df = \left(\frac{2x}{y} + \frac{1}{x}\right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2}\right) dy}}$$

Aufgabe 3 (Atmosphärenmodell)
In einem einfachen Modell der Atmosphäre sei die Temperatur gegeben durch

$$T(P,h) = \frac{P}{\rho_0} e^{-h/H}$$

Dabei ist P der Druck, h die Höhe, H die Skalenhöhe und ρ_0 eine Referenzdichte. Bestimme das **totale Differential** dT.

$$dT = \frac{\partial T}{\partial P} dP + \frac{\partial T}{\partial h} dh$$

$$T_P(P,h) = \frac{1}{\rho_0} e^{-h/H}$$

$$T_h(P,h) = -\frac{P}{\rho_0 H} e^{-h/H}$$

$$dT = \frac{1}{\rho_0} e^{-h/H} dP - \frac{P}{\rho_0 H} e^{-h/H} dh$$

$$\underline{\underline{dT = \frac{e^{-h/H}}{\rho_0} \cdot \left(dP - \frac{P}{H} dh \right)}}$$

2 Taylorreihe für mehrere Variablen

Sei $f(x, y)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_0, y_0) ein Punkt. In der Nähe von (x_0, y_0) kann man die Funktion f durch ein Polynom approximieren. Diese Approximation nennt man die **Taylorentwicklung** von f um den Punkt (x_0, y_0).

Die Taylorentwicklung verallgemeinert die bekannte Taylorreihe aus einer Variablen auf Funktionen mit mehreren Variablen. Dabei treten neben den ersten partiellen Ableitungen auch höhere partielle Ableitungen wie f_{xx}, f_{xy} oder f_{yy} auf.

Lineare Approximation

Die Taylorentwicklung erster Ordnung ist die **lineare Approximation** von f bei (x_0, y_0):

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Diese lineare Approximation entspricht der **Tangentialebene** an den Graph von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Quadratische Approximation

Berücksichtigt man zusätzlich die zweiten partiellen Ableitungen, so erhält man die Taylorentwicklung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} P_2(x, y) = {} & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \Big) \end{aligned}$$

Diese Approximation beschreibt die lokale Krümmung der Funktion.

Kubische Approximation

Berücksichtigt man zusätzlich die dritten partiellen Ableitungen, so erhält man die Taylorentwicklung dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} P_3(x, y) = {} & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \Big) \\ & + \frac{1}{3!}\Big(f_{xxx}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) \\ & + 3f_{xyy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)(y - y_0)^3 \Big) \end{aligned}$$

Allgemeine Idee

Für Punkte (x, y) in der Nähe von (x_0, y_0) gilt näherungsweise

$$f(x, y) \approx P_n(x, y),$$

wobei P_n das Taylorpolynom n-ter Ordnung ist.

Je höher die Ordnung des Taylorpolynoms, desto mehr Information über das lokale Verhalten der Funktion wird berücksichtigt.

Spezialfall: Entwicklung im Ursprung

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist die Entwicklung um den Ursprung $(0, 0)$.

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y,$$

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\Big)$$

Vorgehen zur Bestimmung eines Taylorpolynoms

1. Berechne die benötigten partiellen Ableitungen.
2. Werte alle Ableitungen im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) aus.
3. Setze die Werte in die Formel für P_1, P_2 oder P_3 ein.
4. Vereinfache das resultierende Polynom.

Hinweis: Die Reihenfolge der Ableitungen spielt (für genügend glatte Funktionen) keine Rolle, d. h.

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Übungsaufgaben: Taylorreihen

Aufgabe 1 (Taylorpolynom)

Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = e^x \sin(y)$$

im Punkt $(0, 0)$.

1. Partielle Ableitungen | **2. Auswerten in P(0,0)**

$f(x,y) = e^x \sin(y) \longrightarrow f(0,0) = e^0 \sin(0) = 0$

$f_x(x,y) = e^x \sin(y) \longrightarrow f_x(0,0) = e^0 \sin(0) = 0$

$f_y(x,y) = e^x \cos(y) \longrightarrow f_y(0,0) = e^0 \cos(0) = 1$

$f_{xy}(x,y) = e^x \cos(y) \longrightarrow f_{xy}(0,0) = e^0 \cos(0) = 1$

$f_{xx}(x,y) = e^x \sin(y) \longrightarrow f_{xx}(0,0) = e^0 \sin(0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -e^x \sin(y) \longrightarrow f_{yy}(0,0) = e^0 \sin(0) = 0$

3. & 4. Einsetzen & Vereinfachen

$P_2(x,y) = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{1}{2!}(0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0 \cdot y^2)$

$P_2(x,y) = y + \frac{1}{2} \cdot (2xy)$

$\boxed{P_2(x,y) = y + xy}$

Quotientenregel

$f = \frac{u}{v}$

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Kettenregel generell

$f(t) = u(v(t))$

$f'(t) = u'(v(t)) \cdot v'(t)$

Aufgabe 2 (Taylorpolynom)

Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = \ln\big(x^2 + y + 1\big)$$

im Punkt $(0, 0)$.

Kettenregel Logarithmus

$f(t) = \ln(v(t))$

$f'(t) = \frac{v'(t)}{v(t)}$

1. Partielle Ableitungen

$f(x,y) = \ln(x^2+y+1)$

$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y+1}$ } $u=2x$ | $v=x^2+y+1$; $u'=2$ | $v'=2x$

$f_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y+1}$

$f_{xy}(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y+1)^2}$

$f_{xx}(x,y) = \frac{-2x^2+2y+2}{(x^2+y+1)^2}$

$f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(x^2+y+1)^2}$

Quotientenregel

$(x^2+y+1)^{-1}$

Kettenregel

$-\frac{2x}{(x^2+y+1)^2}$

(Kettenregel)

2. Auswerten in P(0,0)

$f(0,0) = \ln(0^2+0+1) = 0$

$f_x(0,0) = \quad = 0$

$f_y(0,0) = \quad = 1$

$f_{xy}(0,0) = \quad = 0$

$f_{xx}(0,0) = \quad = 2$

$f_{yy}(0,0) = \quad = -1$

3. & 4. Einsetzen & Vereinfachen

$P_2(x,y) = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{1}{2!}(2 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy - 1 \cdot y^2)$

$P_2(x,y) = y + \frac{1}{2} \cdot (2x^2 - y^2)$

$$P_2(x,y) = y + x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

3 Offene Mengen

In der Analysis spielt der Begriff der **offenen Menge** eine zentrale Rolle. Anschaulich beschreibt eine offene Menge eine Punktmenge, in der jeder Punkt ein „innerer Punkt“ ist, d.h. man kann sich um jeden Punkt herum ein kleines Gebiet vorstellen, das vollständig in der Menge liegt.

Definition (offene Menge in $\mathbb{R}^n$). Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst **offen**, wenn für jeden Punkt $x_0 \in U$ ein Radius $r > 0$ existiert, so dass die offene Kugel

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

vollständig in U enthalten ist, also

$$B_r(x_0) \subset U.$$

Geometrische Interpretation. Eine Menge ist offen, wenn man um jeden Punkt der Menge eine kleine Umgebung zeichnen kann, die vollständig in der Menge liegt. Insbesondere bedeutet dies, dass der **Rand** der Menge nicht zur Menge gehört.

Beim Bestimmen, ob eine Menge offen ist, hilft häufig folgende Frage:

> Kann man um jeden Punkt der Menge eine kleine Umgebung zeichnen, die vollständig in der Menge liegt?

Offene & Geschlossene Mengen in $\mathbb{R}$

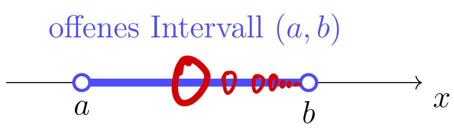
Bevor wir offene Mengen in höheren Dimensionen betrachten, erinnern wir uns an Intervalle auf der Zahlengeraden.

Geschlossenes Intervall. Das Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ enthält beide Randpunkte. Die Punkte a und b gehören also zur Menge.

Halboffene Intervalle. Die Intervalle $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ bzw. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ enthalten genau einen der beiden Randpunkte.

Offenes Intervall. Das Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ enthält die Randpunkte a und b **nicht**.

$\Rightarrow$ Ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist offen, wenn seine **Randpunkte nicht enthalten** sind.



Offene & Geschlossene Mengen in $\mathbb{R}^2$

Nun betrachten wir Beispiele in zwei Dimensionen. In $\mathbb{R}^2$ bestehen Punkte aus zwei Koordinaten (x, y).

Betrachte die beiden Mengen

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}, \qquad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Beide Mengen beschreiben eine Kreisscheibe mit Radius 2.

Offene Menge. Die Menge U enthält nur das *Innere* des Kreises. Der Rand $x^2 + y^2 = 4$ gehört **nicht** zur Menge. Um jeden Punkt von U kann daher eine kleine Kreisscheibe gezeichnet werden, die vollständig in U liegt. Somit ist U eine **offene Menge**.

Geschlossene Menge. Die Menge V enthält sowohl das Innere des Kreises als auch den Rand $x^2 + y^2 = 4$. Der Rand gehört also zur Menge, weshalb V eine **geschlossene Menge** ist.