Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 3

Richtungsableitungen, Tangentialebene & totales Differential

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 12.03.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Richtungsableitung
2. Tangentialebene
3. Linearisierung & totales Differential

1 Richtungsableitung

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $P = (x_0, y_0)$ ein Punkt. Während die partiellen Ableitungen die Änderung in x- bzw. y-Richtung messen, beschreibt die Richtungsableitung die Änderung von f in *beliebiger Richtung*.

Definition. Sei $\vec{r}$ ein Richtungsvektor. Zuerst bestimmen wir den normierten Richtungsvektor

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Dann ist die Richtungsableitung von f im Punkt P definiert durch

$$D_{\vec{u}} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}.$$

Dabei gilt

$$P + h\vec{u} = (x_0, y_0) + h(u_1, u_2) = (x_0 + hu_1, y_0 + hu_2)$$

Zusammenhang mit dem Gradienten.
Ist f differenzierbar, so gilt

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}, \qquad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet $\cdot$ das Skalarprodukt der beiden Vektoren, also

$$\nabla f(P) \cdot \vec{u} = f_x(P)\, u_1 + f_y(P)\, u_2$$

Geometrische Bedeutung. Die Richtungsableitung misst die Änderungsrate von f, wenn man sich vom Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{u}$ bewegt.

Die Richtungsableitung ist also das Skalarprodukt des Gradienten mit dem normierten Richtungsvektor.

Vorgehen zur Berechnung der Richtungsableitung

1. Gradient berechnen $\nabla f(x, y)$
2. Im Punkt auswerten $\nabla f(P)$
3. Richtungsvektor normieren $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$
4. Skalarprodukt berechnen $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Übungsaufgabe: Richtungsableitung

Gegeben seien

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^2, \qquad \vec{r} = (3,-4), \qquad P = (1,2)$$

Bestimme die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung von $\vec{r}$.

1. Gradient berechnen

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^2$$

$$f_y(x,y) = 2x^2y$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy^2 \\ 2x^2y \end{pmatrix}$$

2. Gradient im Punkt P(1,2) auswerten

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2^2 \\ 2\cdot 1^2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Richtungsvektor normieren

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

4. Skalarprodukt bilden

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = 11\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)$$

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \frac{33}{5} - \frac{16}{5} = \frac{17}{5}$$

Gradient auf einem allgemeinen Punkt P(x,y):

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy^2 \\ 2x^2y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \frac{17}{5}$$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \frac{3}{5}(3x^2 + 2xy^2) - \frac{4}{5}\cdot 2x^2y$$

2 Tangentialebene

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und (x_0, y_0) ein Punkt im Definitionsbereich von f.

Definition. Die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist gegeben durch

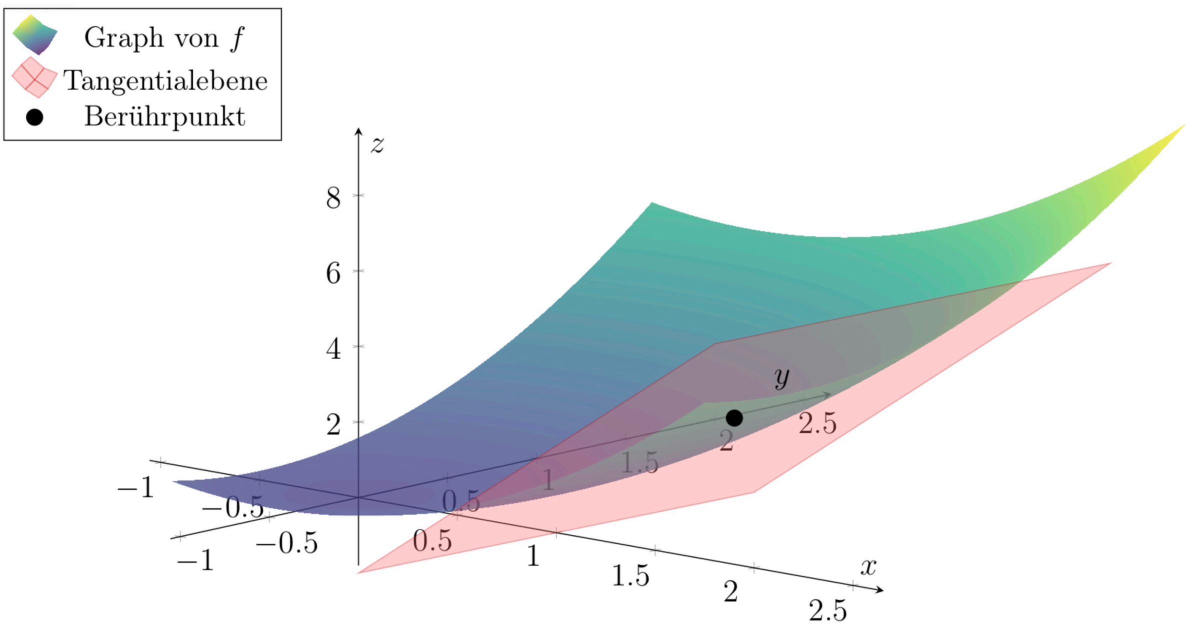
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Interpretation. Die Tangentialebene beschreibt die beste lineare Approximation der Funktion f in der Nähe des Punktes (x_0, y_0). Sie ist die Verallgemeinerung der Tangente für Funktionen mehrerer Variablen.

Vorgehen zur Bestimmung einer Tangentialebene

1. Partielle Ableitungen f_x und f_y berechnen.
2. Funktionswert $f(x_0, y_0)$ bestimmen.
3. Ableitungen im Punkt einsetzen: $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$
4. In die Tangentialebenenformel einsetzen.

Tangentialebene an $f(x, y) = x^2 + y^2$ im Punkt $(1, 1, 2)$



Übungsaufgaben: Tangentialebene

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2y + y^2$$

Bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(3, 4)$.

1. f_x & f_y

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

2. & 3. Fkt's-werte bestimmen

$$f(1,1) = \ln(1^2+1^2) = \ln(2)$$

$$f_x(1,1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1^2} = 1$$

$$f_y(1,1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1^2} = 1$$

4. Tangentialebene aufstellen

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = \ln(2) + 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1)$$

$$z = x+y+\ln(2)-2$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, 1)$.

1. f_x & f_y

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

2. & 3. Fkt's-werte bestimmen

$$f(1,1) = \ln(1^2+1^2) = \ln(2)$$

$$f_x(1,1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1^2} = 1$$

$$f_y(1,1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1^2} = 1$$

4. Tangentialebene aufstellen

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = \ln(2) + 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1)$$

$$z = x+y+\ln(2)-2$$

3 Linearisierung und totales Differential

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und (x_0, y_0) ein Punkt.

Linearisierung. In der Nähe des Punktes (x_0, y_0) kann die Funktion f durch eine lineare Funktion approximiert werden. Diese sogenannte Linearisierung ist gegeben durch

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Diese Funktion entspricht genau der Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Für Punkte (x, y) nahe bei (x_0, y_0) gilt daher näherungsweise

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

Totales Differential. Setzt man

$$dx = x - x_0, \qquad dy = y - y_0,$$

so kann die approximative Änderung der Funktion geschrieben werden als

$$df = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$$

Das totale Differential df beschreibt die approximative Änderung der Funktion f am Punkt (x_0, y_0), wenn sich x um dx und y um dy ändern.

Notation für kleine Änderungen. Oft schreibt man für die tatsächliche Änderung einer Variablen

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0$$

Für kleine Änderungen gilt näherungsweise

$$\Delta f \approx df$$

Das totale Differential liefert also eine lineare Approximation der tatsächlichen Funktionsänderung.

Übungsaufgaben: Totales Differential

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x - y}$$

Bestimme das totale Differential df im Punkt $(3, 1)$.

1. Partielle Ableitungen

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

2. Im Punkt P(3,1) auswerten

$$f_x(3,1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f_y(3,1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3. Totales Differential

$$df = f_x(3,1)\,dx + f_y(3,1)\,dy$$

$$df = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,dy$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x}{y}\right) \quad \left.\begin{aligned} u &= \tan(v) \\ u' &= \frac{1}{\cos^2(v)} = \sec^2(v) \end{aligned}\right\} \quad \left|\; \begin{aligned} v &= \frac{x}{y} \\ v_x &= \frac{1}{y} \end{aligned} \;\right| \quad \begin{aligned} v &= \frac{x}{y} \\ v_y &= -\frac{x}{y^2} \end{aligned}$$

Bestimme das totale Differential df im Punkt $(1, 1)$.

1. Partielle Ableitungen

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} \sec^2\left(\frac{x}{y}\right)$$

2. Im Punkt P(1,1) auswerten

$$f_x(1,1) = \frac{1}{1}\sec^2\left(\frac{1}{1}\right) = \sec^2(1)$$

$$f_y(1,1) = -\frac{1}{1^2}\sec^2\left(\frac{1}{1}\right) = -\sec^2(1)$$

3. Totales Differential

$$df = f_x(1,1)\,dx + f_y(1,1)\,dy$$

$$df = \sec^2(1)\,dx - \sec^2\,dy$$

$$df = \sec^2(1) \cdot (dx - dy)$$

Aufgabe 3 (Thermodynamik)

Die ideale Gasgleichung lautet

$$PV = nRT,$$

wobei P der Druck, V das Volumen, T die Temperatur und n, R Konstanten sind.

1. Drücke den Druck P als Funktion von T und V aus.
2. Bestimme das totale Differential dP.
3. Verwende das totale Differential, um eine lineare Näherung für die Druckänderung $\Delta P = P - P_0$ zu bestimmen, wenn sich die Temperatur um $\Delta T = T - T_0$ und das Volumen um $\Delta V = V - V_0$ ändern.

1. Funktion P

$PV = nRT \quad /:V$

$$P(T,V) = \frac{nRT}{V}$$

2. Totales Differential

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$$

Totales Differential:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial T} dT + \frac{\partial P}{\partial V} dV$$

$$\downarrow$$

$$dP = \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV$$

3. Lineare Näherung für Druckänderung ΔP

Ausgangspunkt (T_0, V_0) gilt:

$$P_0 = \frac{nRT_0}{V_0}$$

$\Delta T = T - T_0, \quad \Delta V = V - V_0$

$\Delta P \approx dP$

$$dP = \frac{nR}{V_0} \Delta T - \frac{nRT_0}{V_0^2} \Delta V$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P \approx \frac{nR}{V_0} \Delta T - \frac{nRT_0}{V_0^2} \Delta V$$