Mathematik II: Analysis B

Übungsstunde 2

Mehrdimensionale Funktionen, Partielle Ableitung & Gradient

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 05.03.2026

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Mehrdimensionale Funktionen & Definitionsbereich
2. Partielle Ableitungen
3. Totale Ableitung & Mehrdimensionale Kettenregel
4. Gradient

1 Mehrdimensionale Funktionen

In Analysis A betrachteten wir hauptsächlich Funktionen einer Variablen, also Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x)$$

In Analysis B erweitern wir diese Idee auf mehrere unabhängige Variablen. Der wichtigste Fall zu Beginn ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Dabei sind x und y *unabhängige Variablen* (Inputs), und der Funktionswert $f(x, y)$ ist der *Output*.

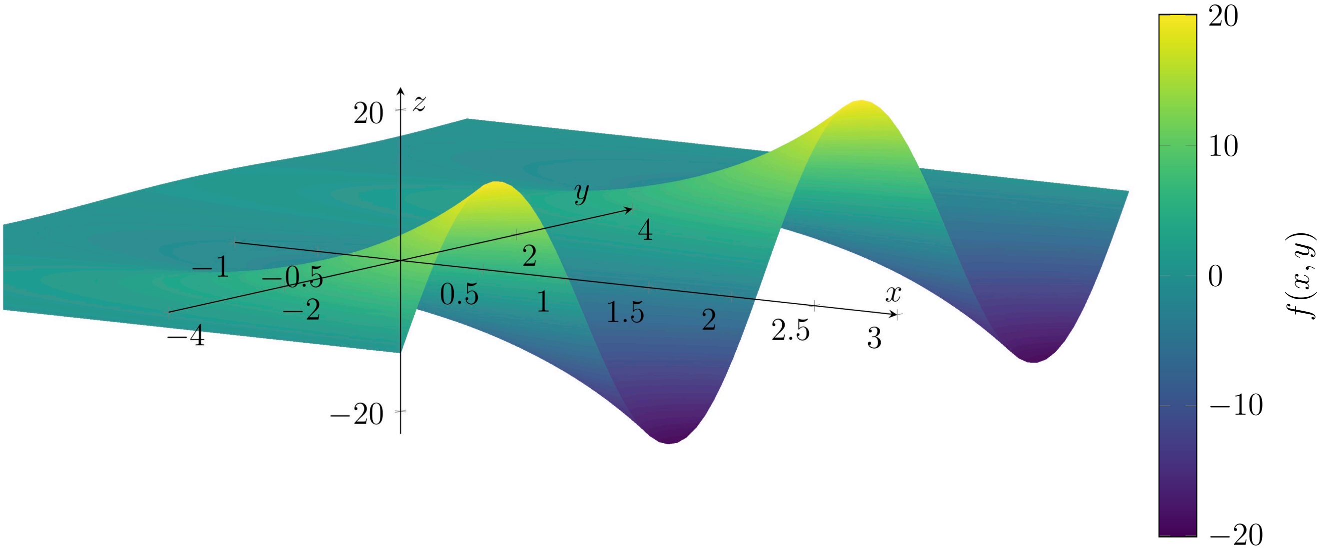
Geometrische Interpretation. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man als *Höhenfunktion* über der Ebene verstehen: jedem Punkt (x, y) in der Ebene wird eine Höhe $z = f(x, y)$ zugeordnet. Der zugehörige *Graph* ist $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.
Da der Graph in $\mathbb{R}^3$ liegt, zeichnen wir Funktionen in zwei Variablen oft indirekt, z. B. über *Niveaumengen* (Niveaulinien).

Niveaumengen / Niveaulinien. Für einen festen Wert $c \in \mathbb{R}$ heisst

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

die *Niveaumenge* (in $\mathbb{R}^2$ auch: *Niveaulinie*) zum Niveau c. Intuitiv sind das die Punkte in der Ebene, an denen die „Höhe“ gleich bleibt. Diese Idee ist analog zu Höhenlinien auf topographischen Karten.

Graph von $f(x, y) = e^x \sin(y)$



Definitionsbereich (Domain): Grundidee & Vorgehen

Der *Definitionsbereich* (auch: *Definitionsmenge*) einer Funktion f ist die Menge aller Inputs, für die die Funktionsvorschrift *sinnvoll definiert* ist:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \text{ ist definiert}\}.$$

Prinzip: Man startet mit $D = \mathbb{R}^2$ und entfernt dann systematisch alle Punkte & Bereiche, die aufgrund von „Verbotsschildern" nicht erlaubt sind. Am Ende erhält man D_f als Schnitt aller Bedingungen.

Typische „Verbotsschilder" (wie in Analysis A):

- **Nenner:** Ein Nenner darf nie 0 sein.
  $\frac{\text{(etwas)}}{\text{Nenner}}$ ist nur definiert, wenn Nenner $\neq 0$.
- **Gerade Wurzel:** Unter einer geraden Wurzel muss der Ausdruck *nichtnegativ* sein.
  $\sqrt{\text{(Ausdruck)}}$ ist nur definiert, wenn Ausdruck ≥ 0.
- **Logarithmus:** Das Argument eines Logarithmus muss *positiv* sein.
  $\ln(\text{Argument})$ ist nur definiert, wenn Argument > 0.

Verkettungen (Kompositionen): „innen vor aussen". Bei zusammengesetzten Ausdrücken prüft man die Bedingungen in der richtigen Reihenfolge:

1. *Zuerst* muss der innere Ausdruck überhaupt definiert sein.
2. *Dann* kommen die Bedingungen des äusseren Ausdrucks hinzu.

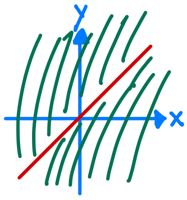
In der Praxis bedeutet das: man sammelt alle notwendigen Ungleichungen/Gleichungen und bildet deren *Schnittmenge.*

Merksatz. Der Definitionsbereich in mehreren Variablen ist konzeptionell *identisch* zu Analysis I — nur dass wir jetzt statt Punkten in $\mathbb{R}$ typischerweise *Kurven, Geraden oder Flächen* aus $\mathbb{R}^2$ ausschneiden.

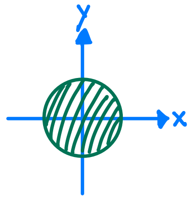
Übungsaufgaben: Definitionsbereich

Bestimme jeweils den **Definitionsbereich** der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

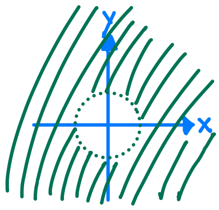
1. $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$



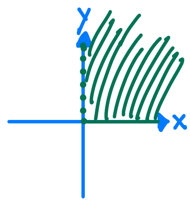
2. $f(x,y) = \underbrace{\sqrt{4-x^2-y^2}}_{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$



3. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$



4. $f(x,y) = \ln\left(x^{\sqrt{y}}\right) = \sqrt{y} \cdot \ln(x) \longrightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq 0\}$



Schwierig

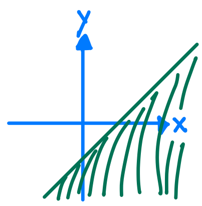
5. $f(x,y) = \sqrt{\ln(x-y)}$

Logarithmus: $x - y > 0 \quad /-x$
$-y > -x \quad /\cdot(-1)$
$y < x$

Wurzel: $\ln(x-y) \geq 0 \xrightarrow{e^1} x-y \geq e^0$
$x - y \geq 1 \quad /-x$
$-y \geq 1-x \quad /\cdot(-1)$
$y \leq x-1$

Wurzeleinschränkung stärker als Logarithmus

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x-1\}$

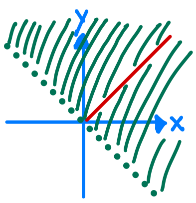


6. $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+y)}{x^2-y^2}$

$x+y > 0 \longrightarrow y > -x$
$x^2 - y^2 \neq 0 \longrightarrow \underbrace{y \neq \pm x}$

$y \neq -x$ bereits in Bedingung $y > -x$ enthalten
$\downarrow$
$y \neq x$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x,\ y \neq x\}$



Zusatz: Zeichne die Definitionsbereiche auf

2 Partielle Ableitungen

In Analysis A haben wir Funktionen einer Variablen $f(x)$ betrachtet und deren Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hängt der Funktionswert von zwei unabhängigen Variablen ab:

$$f(x, y).$$

Um die Änderungsrate zu messen, variieren wir *nur eine Variable* und halten die andere fest.

Definition. Die *partielle Ableitung nach x* ist definiert als

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}.$$

Die *partielle Ableitung nach y* ist definiert als

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}.$$

Interpretation.

- $f_x(x,y)$ misst die Änderungsrate in x-Richtung (bei festem y).
- $f_y(x,y)$ misst die Änderungsrate in y-Richtung (bei festem x).

Man kann sich das geometrisch als Tangenten an Schnittkurven vorstellen:

$$x \mapsto f(x, y_0), \qquad y \mapsto f(x_0, y).$$

Partielle Ableitungsoperatoren. Statt $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ schreibt man auch $\partial_x f$, $\partial_y f$ oder f_x, f_y. Dabei bedeutet $\frac{\partial}{\partial x}$: *Ableiten nach x bei festgehaltenem y.*

Höhere partielle Ableitungen erhält man durch wiederholtes Ableiten, zum Beispiel

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

Die Reihenfolge der Ableitungen spielt (für genügend glatte Funktionen) keine Rolle, d. h.

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Rechenregel.
Beim partiellen Ableiten behandelt man die jeweils andere Variable als Konstante.

Übungsaufgaben: Partielle Ableitung

Bestimme jeweils die partiellen Ableitungen f_x und f_y.

1. $f(x, y) = \cos(x^2 y)$

f_x: $\left.\begin{array}{l|l} u = \cos(x) & v = x^2y \\ u' = -\sin(x) & v' = 2xy \end{array}\right\}$ $f_x(x,y) = -2xy\sin(x^2y)$

f_y: $\left.\begin{array}{l|l} u = \cos(y) & v = x^2y \\ u' = -\sin(y) & v' = x^2 \end{array}\right\}$ $f_y(x,y) = -x^2\sin(x^2y)$

2. $f(x, y) = \sin(x^3 + y^2)$

f_x: $\left.\begin{array}{l|l} u = \sin(x) & v = x^3 + y^2 \\ u' = \cos(x) & v' = 3x^2 \end{array}\right\}$ $f_x(x,y) = 3x^2\cos(x^3 + y^2)$

f_y: $\left.\begin{array}{l|l} u = \sin(y) & v = x^3 + y^2 \\ u' = \cos(y) & v' = 2y \end{array}\right\}$ $f_y(x,y) = 2y\cos(x^3 + y^2)$

3. $f(x, y) = \tan(\cos x \cdot \sin y)$

f_x: $\left.\begin{array}{l|l} u = \tan(x) & v = \cos(x)\sin(y) \\ u' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} & v' = -\sin(x)\sin(y) \end{array}\right\}$ $f_x(x,y) = -\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos^2(\cos(x)\sin(y))}$

f_x: $\left.\begin{array}{l|l} u = \tan(y) & v = \cos(x)\sin(y) \\ u' = \dfrac{1}{\cos^2(y)} & v' = \cos(x)\cos(y) \end{array}\right\}$ $f_x(x,y) = \dfrac{\cos(x)\cos(y)}{\cos^2(\cos(x)\sin(y))}$

4. $f(x, y) = \dfrac{\cos(x^2 y)}{x + y}$

f_x: $\left.\begin{array}{l|l} u = \cos(x) & v = x^2y \\ u' = -\sin(x) & v' = 2xy \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l|l} u = \cos(x^2y) & v = x+y \\ u' = -2xy\sin(x^2y) & v' = 1 \end{array}\right\}$ $f_x(x,y) = \dfrac{-2xy(x+y)\sin(x^2y) - \cos(x^2y)}{(x+y)^2}$

f_y: $\left.\begin{array}{l|l} u = \cos(y) & v = x^2y \\ u' = -\sin(y) & v' = x^2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l|l} u = \cos(x^2y) & v = x+y \\ u' = -x^2\sin(x^2y) & v' = 1 \end{array}\right\}$ $f_y(x,y) = \dfrac{-x^2(x+y)\sin(x^2y) - \cos(x^2y)}{(x+y)^2}$

5. $f(x, y) = x\, e^{\cosh(y)}$

$f_x(x,y) = e^{\cosh(y)}$

$f_y(x,y) = x\sinh(y)e^{\cosh(y)}$

3 Totale Ableitung und Kettenregel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und

$$z = f(x, y),$$

wobei x und y selbst Funktionen einer Variablen t seien:

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Dann hängt z indirekt von t ab:

$$z(t) = f(x(t), y(t)).$$

Totale Ableitung.
Die Ableitung von z nach t erhält man mit der *mehrdimensionalen Kettenregel*:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Interpretation.
Die totale Änderung ist die Summe der Änderungen in x- und y-Richtung, gewichtet mit den jeweiligen Änderungsraten von $x(t)$ und $y(t)$.

Verallgemeinerte Kettenregel.
Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

gilt

$$\frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

Übungsaufgaben: Totale Ableitung

Berechne jeweils $\dfrac{dz}{dt}$.

1. $z = xy, \quad x = t^2, \quad y = \sin t$

$$z'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$z'(t) = y \cdot 2t + x \cdot \cos(t)$$

$$z'(t) = \sin(t) \cdot 2t + t^2 \cdot \cos(t)$$

$$z'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t)$$

2. $z = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$

$$z'(t) = 2x \cdot (-\sin(t)) + 2y \cdot \cos(t)$$

$$z'(t) = -2\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)$$

$$z'(t) = 0$$

$\dfrac{dz}{dt} = 0 \longrightarrow$ z ist Konstante der Zeit $\longrightarrow$ z ist eine Erhaltungsgrösse (Allgemeine Mechanik/PC 3)

3. $z = e^{xy}, \quad x = t^2, \quad y = t^3$

$$z'(t) = y e^{xy} \cdot 2t + x e^{xy} 3t^2$$

$$z'(t) = t^3 e^{t^5} 2t + t^2 e^{t^5} 3t^2$$

$$z'(t) = 2t^4 e^{t^5} + 3t^4 e^{t^5}$$

$$z'(t) = 5t^4 e^{t^5}$$

4. $z = \ln(x + y), \quad x = e^t, \quad y = t^2$

$$z'(t) = \frac{1}{x+y} \cdot e^t + \frac{1}{x+y} 2t$$

$$z'(t) = \frac{e^t}{e^t + t^2} + \frac{2t}{e^t + t^2}$$

$$z'(t) = \frac{e^t + 2t}{e^t + t^2}$$

4 Gradient

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Definition. Der Gradient von f ist der Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient hängt vom Punkt (x,y) ab und beschreibt die lokale Änderung der Funktion.

Geometrische Bedeutung. Der Gradient zeigt in die Richtung des *steilsten Anstiegs* der Funktion. Die maximale Änderungsrate von f in diesem Punkt beträgt

$$|\nabla f(x,y)|.$$

Der Gradient steht ausserdem senkrecht auf den Niveaulinien der Funktion.

Steilster Anstieg: $\begin{pmatrix} \partial_{\color{blue}x} f \\ \partial_{\color{red}y} f \end{pmatrix}$

Geringster Anstieg (Steilster Abfall): $-\begin{pmatrix} \partial_{\color{blue}x} f \\ \partial_{\color{red}y} f \end{pmatrix}$

Kein Anstieg (Niveaulinie): $\begin{pmatrix} -\partial_{\color{red}y} f \\ \partial_{\color{blue}x} f \end{pmatrix}$

Übungsaufgabe: Gradient und Richtungsableitungen

Gegeben ist $f(x, y) = \sin(x^3 + y^2)$.

1. Bestimme den Gradienten $\nabla f(x, y)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \cos(x^3+y^2) \\ 2y\cos(x^3+y^2) \end{pmatrix} = \cos(x^3+y^2) \cdot \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

2. Bestimme die Richtung des **steilsten Anstiegs** im Punkt $P = (1, 1)$.

Steilster Anstieg $P(1,1) \longrightarrow$ $$\begin{pmatrix} f_x(1,1) \\ f_y(1,1) \end{pmatrix} = \cos(1^3+1^2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 1^2 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\cos(2)}_{\text{Vorfaktor}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{Richtungsvektor (des steilsten Anstiegs)}}$$

3. Bestimme die Richtung des **stärksten Abfalls** im Punkt $P = (1, 1)$.

Steilster Abfall $P(1,1) \longrightarrow$ $$-\begin{pmatrix} f_x(1,1) \\ f_y(1,1) \end{pmatrix} = -\cos(1^3+1^2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 1^2 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\cos(2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \cos(2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung des stärksten Abfall}}$$

4. Bestimme einen **Richtungsvektor entlang der Niveaulinie** durch $P = (1, 1)$ (also eine Richtung mit *keiner Änderung* von f).

Niveaulinie : $$\begin{pmatrix} -f_y(1,1) \\ f_x(1,1) \end{pmatrix} = \cos(2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung der Niveaulinie!}}$$

Für Richtungen sind Vorfaktoren (ausser Vorzeichen wie + & −) egal da diese nur Einfluss auf den Betrag vom Vektor haben aber nicht auf dessen Richtung