Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 13

Gewöhnliche DGL's höherer Ordnung

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 15.12.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. ODE's 1. Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution
2. Homogene ODE's höherer Ordnung: Eulerscher Ansatz
3. Inhomogene ODE's höherer Ordnung (mit Störfunktion): Partikuläransatz

ODE's 1. Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution

Treten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung Ausdrücke wie $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ oder Potenzen davon (z. B. $\frac{y^2}{x^2}$) auf, so kann die Gleichung oft durch eine geeignete z-Substitution vereinfacht werden.
Typischerweise setzt man

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{y},$$

wodurch sich die Differentialgleichung in eine separierbare Gleichung für $z(x)$ umformen lässt. Anschliessend löst man diese Differentialgleichung nach z und erhält am Ende durch Rücksubstitution die gesuchte Funktion $y(x)$.

Beispielaufgabe: 16a (Analysis A & B Altprüfung 2021S)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}, \qquad x > 0 \text{ und in einem geeigneten Intervall.}$$

Homogene ODE's höherer Ordnung: Eulerscher Ansatz

Wir betrachten lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$a_n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0, \qquad a_n \neq 0$$

Schritt 1: Eulerscher Ansatz Wir setzen

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Dann gilt $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$, und nach Einsetzen erhält man

$$e^{\lambda x}\big(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big) = 0$$

Da $e^{\lambda x} \neq 0$, folgt die *charakteristische Gleichung*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Schritt 2: Nullstellen bestimmen Bestimme die (ggf. komplexen) Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des charakteristischen Polynoms inklusive ihrer Vielfachheiten.

Schritt 3: Allgemeine Lösung aufbauen

- **Reelle, einfache Nullstelle λ:** $y(x) = C\, e^{\lambda x}$
- **Reelle Nullstelle λ mit Vielfachheit r:**

$$y(x) = \big(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{r-1}x^{r-1}\big)e^{\lambda x}$$

- **Komplexes (konjugiertes) Paar $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $(\beta \neq 0)$:**

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\big)$$

- **Rein Imaginäre Nullstellen $\lambda = \pm i\beta$, $(\beta \neq 0)$:** *Hinweis: Rein imaginäre Nullstellen sind ein Spezialfall der komplexen Eigenwerte wo der Realteil $\alpha = 0$ ist.*

$$y(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$$

Hinweis Bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält die allgemeine Lösung typischerweise n unbekannte Konstanten. Um daraus eine eindeutige spezielle Lösung zu erhalten, benötigt man daher n unabhängige Nebenbedingungen (z. B. Anfangswerte), mit denen diese Konstanten bestimmt werden.

Beispielaufgaben (Eulerscher Ansatz)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(3)}(x) = 0$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Bestimme zuerst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$m\,x''(t) + k\,x(t) = 0 \qquad k, m > 0$$

Löse dann das Anfangswertproblem

$$x(0) = s_0, \qquad x'(0) = v_0$$

Hinweis: Diese Differentialgleichung beschreibt den harmonischen Oszillator, z. B. ein ungedämpftes Feder–Masse-System. Dabei sind k und m positive reelle Konstanten. In diesem Kontext bezeichnen wir t als Zeitvariable und $x(t)$ als die zugehörige Auslenkung.

Inhomogene ODEs höherer Ordnung (Störfunktion)

Wir betrachten lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$a_n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = s(x), \qquad a_n \neq 0,$$

wobei $s(x)$ die **Störfunktion** (Inhomogenität) ist.

Vorgehen

1) Homogene Gleichung lösen Zuerst löst man die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

(z. B. mit dem Eulerschen Ansatz) und erhält die homogene Lösung

$$y_{\text{hom}}(x)$$

2) Ansatz für eine partikuläre Lösung Anschliessend stellt man passend zur Störfunktion $s(x)$ einen Ansatz für eine partikuläre Lösung auf:

$$y_{\text{part}}(x) \text{ (Ansatz)}$$

3) Einsetzen und Koeffizienten von $y_{part}(x)$ bestimmen Man setzt $y_{\text{part}}(x)$ (und seine Ableitungen) in die inhomogene Differentialgleichung ein und bestimmt die unbekannten Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich.

4) Allgemeine Lösung Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) \;+\; y_{\text{part}}(x)$$

Ansatzwahl für die partikuläre Lösung (Mini-Tabelle)

Störfunktion $s(x)$	**Ansatz für** $y_{\mathbf{part}}(x)$
Polynom $s(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *Spezialfall:* 0 *ist* m*-fache Nullstelle des char. Polynoms*	 $y_{\text{part}}(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$ $y_{\text{part}}(x) = x^m \big(C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n\big)$
Exponentialfunktion $s(x) = Ae^{kx}$ *Spezialfall:* k *ist* m*-fache Nullstelle des char. Polynoms*	 $y_{\text{part}}(x) = Ce^{kx}$ $y_{\text{part}}(x) = C\, x^m e^{kx}$
Schwingung $s(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ *Spezialfall:* $\pm i\omega$ *ist* m*-fache Nullstelle des char. Polynoms*	 $y_{\text{part}}(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ $y_{\text{part}}(x) = x^m \big(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\big)$

Beispielaufgabe (inhomogene ODE 2. Ordnung)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3x + x^2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$