Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 11

Integration II

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 01.12.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Partielle Integration: Tabellenmethode
2. Integration mit Partialbruchzerlegung
3. Anwendung von Symmetrien

1 Partielle Integration: Tabellenmethode (Schnelltrick)

Wenn wir ein Produkt aus einem Polynom und einer Funktion haben, die sich „periodisch“ integriert (z. B. $\sin x$, $\cos x$, e^x), kann man die partielle Integration mit einer Tabelle besonders schnell ausführen.

Beispielaufgabe: $F(x) = \displaystyle\int x^3 \sin(x)\,dx$

1. In die Spalte D schreiben wir die Ableitungen des Polynoms, bis wir bei 0 ankommen.
2. In die Spalte I schreiben wir die wiederholten Integrale von $\sin x$.
3. Links notieren wir ein abwechselndes Vorzeichen: $+\ -\ +\ -\ \dots$
4. Dann verbinden wir diagonal und addieren die Produkte.

Vorz.	D	I

Merke: Die Tabellenmethode ist nur ein anderer (schnellerer) Weg, die partielle Integration mehrfach anzuwenden. Sie funktioniert besonders gut, wenn

- ein Faktor eines Polynoms ist (wird durch Ableiten immer einfacher).
- der andere Faktor sich „einfach“ integrieren lässt (e^x, $\sin x$, $\cos x$)

Übungsaufgaben zur partiellen Integration (Tabellenmethode)

1. Bestimme eine Stammfunktion von $\int x^3 e^x \, dx$

Vorz.	D	I

2. Bestimme eine Stammfunktion von $\int e^x \cos(x) \, dx$

Vorz.	D	I

2 Integration mit Partialbruchzerlegung

Viele Integrale mit gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wobei P, Q Polynome sind, kann man mit der **Partialbruchzerlegung** lösen. Idee: Wir schreiben den Bruch als Summe von „einfacheren" Brüchen, deren Stammfunktionen wir kennen (meistens $\ln|x - a|$).

Grundidee (einfacher Fall)

Wir betrachten Ausdrücke der Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit} \quad \deg P < \deg Q$$

wobei sich der Nenner in *verschiedene Linearfaktoren* zerlegen lässt:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

Dann machen wir den Ansatz

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

bestimmen die Konstanten A_i und integrieren danach jeden Term einzeln:

$$\int \frac{A_i}{x - a_i}\, dx = A_i \ln|x - a_i| + C$$

Allgemeines Vorgehen:

1. Falls $\deg P \geq \deg Q$: führe eine *Polynomdivision* durch, bis $\deg P < \deg Q$ gilt.
2. Faktorisiere den Nenner $Q(x)$ vollständig in Linearfaktoren.
   - Hat $Q(x)$ nur *einfache* Nullstellen, so erhältst du Faktoren der Form $(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$.
   - Tritt eine Nullstelle a mit Vielfachheit k auf, so erscheint der entsprechende Faktor als $(x-a)^k$ im Nenner. Für diesen Faktor brauchst du später im Ansatz einen Term
     $$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k}.$$
3. Mache einen Ansatz mit unbekannten Konstanten $A, B, C, \ldots$
4. Bestimme die Konstanten durch Einsetzen günstiger x-Werte oder Koeffizientenvergleich.
5. Integriere die einfachen Brüche termweise.

Beispielaufgabe

Bestimmen eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

(Hinweis: Faktorisiere zunächst den Nenner.)

Beispielaufgabe (für die Studierenden)

Bestimmen eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+2x^2}$$

(Hinweis: Beachte das ein Faktor im Nenner doppelt vorkommt und wende die Regel für mehrfache gleiche Faktoren an)

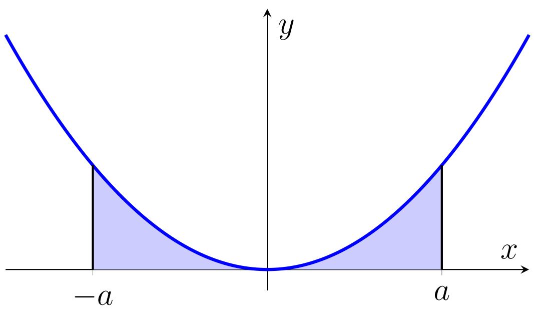
3 Symmetrien ausnutzen

Symmetrien von Funktionen kann man nutzen um bestimmte Integrale gut auszurechnen. In ÜS 6 haben wir uns Symmetrien von Funktion im Detail angeschaut, jetzt können wir diese Relationen sehr gut nutzen um bestimmte Integrale zu berechnen.
Als Erinnerung:

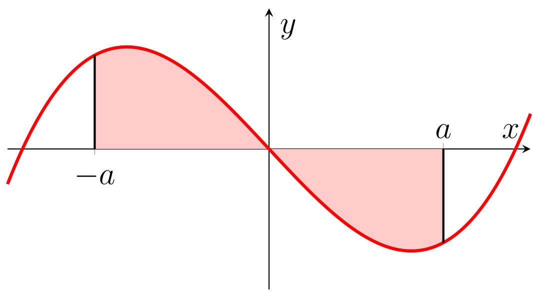
- **Gerade Fkt. (E):** $f(-x) = f(x)$
- **Ungerade Fkt. (O):** $f(-x) = -f(x)$
- **Keine Symmetrie (N):** $f(-x)$ erfüllt keine der beiden obigen Beziehungen

Bei Symmetrischen Integralgrenzen $a \in \mathbb{R}$ gilt fo.lgendes:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} E(x)\,dx &= 2 \cdot \int_{0}^{a} E(x)\,dx \\ \int_{-a}^{a} O(x)\,dx &= 0 \end{aligned}$$



Gerade Funktion (E)
$f(x) = \frac{1}{4}x^2$



Ungerade Funktion (O)
$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x$

Übungsaufgaben: Symmetrie bei Integralen

Bestimme für jedes Integral, ob der Integrand E (gerade), O (ungerade) oder N (keine Symmetrie) ist. Nutze dann (falls möglich) die Symmetrie, um das Integral zu vereinfachen. *Den numerischen Wert der Integrale musst du nicht ausrechnen.*

1. $I_1 = \int_{-2}^{2} (x^3 - x)\cos\bigl(x^2\bigr)\,dx$

2. $I_2 = \int_{-a}^{a} (x^2 + 1)\cos\bigl(x^4\bigr)\,dx$

3. $I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x)\,dx$

4. $I_4 = \int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$

5. $I_5 = \int_{-3}^{3} \bigl(x + \cos x\bigr)\,dx$

6. $I_6 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\bigl(x^3\bigr)\,dx$

7. $I_7 = \int_{-2}^{2} \ln\bigl(1 + x^2\bigr)\,dx$

8. $I_8 = \int_{-a}^{a} \arctan(x)\, e^{x^2}\,dx$

9. $I_9 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\cos\bigl(x^2\bigr)\,dx$

10. $I_{10} = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1 + x^6}\,dx$

Beispielaufgabe: Sehr schwieriges Integral

Bestimme den Wert des Integrals, untersuche dabei zuerst die Symmetrieeigenschaft des Integranden.

$$I \;:=\; \int_{-e^{2\pi}}^{e^{2\pi}} \frac{|x|^{|x|} \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{\arccos\left(x^{2n}\right)}{n!}}{\tan\left(\exp\left(\sum_{n=0}^{99} x^{2n}\right)\right) \displaystyle\prod_{n=0}^{34} x^{2n+1}}\, dx$$