Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 10

Taylorreihen II & Integration I

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 24.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Taylorreihen: Konvergenzradius und Konvergenzbereich
2. Grundbegriffe Integration & Hauptsatz der Integralrechnung
3. Standard-Stammfunktionen
4. u-Substitution
5. Partielle Integration

1 Taylorreihen und Konvergenzradius

Rückblick: Potenzreihen

Eine **Potenzreihe um den Entwicklungspunkt** $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n,$$

wobei c_n die **Koeffizienten** heissen. Für jedes feste x ist das eine gewöhnliche unendliche Reihe.

Taylorreihe als spezielle Potenzreihe

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ (in einer Umgebung von x_0) beliebig oft differenzierbar, so heisst

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n$$

die **Taylorreihe von f um x_0**.

Sie ist also eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Alles, was wir über Potenzreihen (Konvergenzradius, Konvergenzintervall, ...) gelernt haben, gilt daher *direkt* auch für Taylorreihen.

Konvergenzradius und -intervall

Es gibt einen **Konvergenzradius** $R \in [0, \infty]$ mit:

$$|x - x_0| < R \;\Rightarrow\; \text{Reihe konvergiert absolut}, \qquad |x - x_0| > R \;\Rightarrow\; \text{Reihe divergiert.}$$

Das zugehörige **Konvergenzintervall** ist $[x_0 - R,\, x_0 + R]$, die **Randpunkte** $|x - x_0| = R$ müssen *separat* geprüft werden.

Wie findet man R?

Quotiententest Wenn der Grenzwert existiert,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

dann gilt

$$\boxed{R = \frac{1}{L}} \qquad (\text{mit } 1/0 = \infty,\ 1/\infty = 0)$$

Intuition: Für $|x - x_0| < 1/L$ verhalten sich die Terme wie in einer geometrischen Reihe.

Wurzeltest Mit

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{M}}$$

Beispielaufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

1. Bestimme die **Taylorreihe** von f um $x_0 = 0$, das heisst schreiben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   und gib eine explizite Formel für c_n an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

2. Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius** R dieser Reihe.

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \ln(1 + x)$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

1. Bestimme die **Taylorreihe** von g um $x_0 = 0$, das heisst schreiben

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

und gib eine explizite Formel für c_n an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

2. Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius** R dieser Reihe.

2 Integration: Grundbegriffe & Hauptsatz der Integralrechnung

Unbestimmtes Integral (Stammfunktionen)

Eine Funktion F heisst **Stammfunktion** von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x$$

Das **unbestimmte Integral** von f schreiben wir als

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Lineare Regeln:

- $\displaystyle\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$
- Konstanten können „nach vorne“ gezogen werden: $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$

Bestimmtes Integral

Die (bestimmte) Integration beschreibt in vielen Situationen die *Fläche unter einem Graphen*. Für eine Funktion $f(x)$ und ein Intervall $[a, b]$ schreiben wir

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

für den (orientierten) Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$. Für eine stetige Funktion f auf $[a, b]$ definieren wir das **bestimmte Integral**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als die orientierte Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und b. Negatives Vorzeichen bedeutet dabei: „Fläche unterhalb der x-Achse“.

Fundamentalsatz der Analysis

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b] \in \mathbb{D}$.

(Teil I) Wir definieren

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

Das heisst: $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f.

(Teil II) Ist F eine beliebige Stammfunktion von f auf $[a, b]$, d. h. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Zusammengefasst: Ableiten und Integrieren sind (unter den passenden Voraussetzungen) inverse Operationen.

3 Standard-Stammfunktionen

In vielen Integrationsaufgaben braucht man nur einige wenige *Standardstammfunktionen*. Diese sollte man (ungefähr) auswendig kennen (oder in der Formelsammlung finden können).

Polynome und Potenzen

Für $n \neq -1$ gilt

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(Das ist die Umkehrung der Potenzregel bei Ableitungen)
Beispiele:

$$\int 3x^2 \, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3 + C, \qquad \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

Konstanten:

$$\int a \, dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$$

Bemerkung: „inverse Kettenregel“ bei linearem Argument

Bei vielen Standardfunktionen (Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen) kann man Integrale mit *linearem* Argument sehr einfach lösen.
Ist das Argument von der Form $ax + b$ (also nur x^1 und Konstanten), dann gilt:

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Man „teilt“ also einfach durch die Ableitung des Arguments ($(ax + b)' = a$). Das ist genau die **inverse Kettenregel**.

Wenn das Argument *nicht* linear ist (z. B. x^2, $\sqrt{x}$ oder allgemein eine kompliziertere Funktion), reicht dieses einfache „Durch-a-Teilen“ nicht mehr aus. Dann braucht man im Allgemeinen die **u-Substitution** (also die Kettenregel „rückwärts“) oder andere Methoden.

Exponentialfunktionen

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

Trigonometrische Funktionen

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

Logarithmus

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

Diese Formeln in Kombination mit den linearen Rechenregeln $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ reichen bereits für viele Standardaufgaben zur Integration aus.

4 u-Substitution

Die **u-Substitution** ist die Kettenregel „rückwärts“. Sie ist nützlich für Integrale der Form

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Idee: Wir führen eine neue Variable

$$u = g(x)$$

ein. Dann ist

$$du = g'(x)\, dx$$

und das Integral wird zu einem einfacheren Integral in der Variable u.

Allgemeines Rezept:

1. Wähle eine Substitution $u = g(x)$ (typischerweise der innere Ausdruck).
2. Berechne $du = g'(x)\, dx$ und löse nach dx bzw. nach $g'(x)\, dx$ auf.
3. Setze alles in das Integral ein und schreibe es nur noch in u.
4. Integriere in u: $\displaystyle\int f(u)\, du = F(u) + C$.
5. Substituiere zurück: $u = g(x)$.

Beispielaufgabe

$$\int x\, e^{x^2}\, dx$$

Merke: Wenn das Argument *linear* ist (z. B. $ax + b$), reicht es, durch a zu teilen („inverse Kettenregel“). Wenn das Argument komplizierter ist (z. B. x^2, x^3, $\sqrt{x}$), braucht man im Allgemeinen die u-Substitution.

Bestimmte Integrale mit u-Substitution

Bei **bestimmten** Integralen funktioniert die u-Substitution genau gleich wie bei unbestimmten. Nur ein zusätzlicher Schritt muss noch gemacht werden: die **Integrationsgrenzen müssen angepasst** werden.

Vorgehen:

1. Wähle eine Substitution $u = g(x)$.
2. Berechne $du = g'(x)\,dx$ und ersetze $g'(x)\,dx$ durch du.
3. Rechne die neuen Grenzen aus:

$$x = a \Rightarrow u = g(a), \qquad x = b \Rightarrow u = g(b)$$

4. Schreibe das Integral komplett in u mit den neuen Grenzen und integriere:

$$\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{\text{u-Substitution}} \int_{u(a)}^{u(b)} \tilde{f}(u)\,du = \Big[\tilde{F}(u)\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \tilde{F}\big(u(b)\big) - \tilde{F}\big(u(a)\big)$$

Beispielaufgabe

$$I = \int_0^2 x\,e^{x^2}\,dx$$

Bemerkung: Man *kann* alternativ auch ohne Grenz-Anpassung rechnen, d. h. erst wie beim unbestimmten Integral substituieren, wieder zu x zurücksubstituieren und am Schluss $F(1) - F(0)$ ausrechnen. Oft geht es aber schneller, die Grenzen direkt mit zu transformieren.

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $F(x) = \displaystyle\int (6x-5)(6x^2-10x)^4\,dx$

2. $\displaystyle\int x^3 \sin\big(x^2\big)\,dx$ (Hinweis: Verwende eine u-Substitution und schreibe das Integral vollständig in der neuen Variablen u in der Form $\int \tilde{f}(u)\,du$. Das entstehende Integral muss nicht ausgewertet werden.)

3. $A = \displaystyle\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$

5 Partielle Integration

Die **partielle Integration** ist die Produktregel „rückwärts“. Für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gilt:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

In Kurzschreibweise:

$$\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx$$

Wann benutzt man partielle Integration?

Typische Situationen:

- Produkt aus einem *Polynom* und einer „netten“ Funktion: $x^n e^x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$. Da sollte man das Polynom immer ableiten und die andere Funktion integrieren.
- Produkte mit $\ln(x)$ oder $\arctan(x)$ lassen sich nicht gut direkt integrieren, aber sehr gut ableiten. Diese haben sogar eine „höhere Priorität“, abgeleitet zu werden, als Polynome!

$$\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{x^2+1}$$

Rezept (klassisch):

1. Wähle u so, dass u' *einfacher* ist als u (z. B. Polynom wird kleiner).
2. Wähle v' so, dass du v leicht integrieren kannst.
3. Setze in die Formel $\displaystyle\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx$ ein.

Beispielaufgabe

Berechne $F(x) = \displaystyle\int xe^x\, dx$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

1. $F(x) = \int \left(x^2 + 1\right) \cdot \cos(x)\, dx$

2. $F(x) = \int \ln(x)\, dx$ (Hinweis: Schreibe $\ln(x)$ als $\ln(x) \cdot 1$).

   Was wäre noch $I = \int_1^2 \ln(x)\, dx$?