# Mathematik I: Analysis A

## Übungsstunde 6

*Funktionen*

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 27.10.2025

*Material:* visva-loganathan.ch

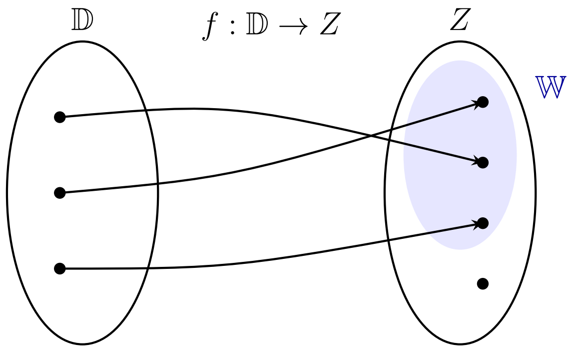
# Überblick dieser Übungsstunde

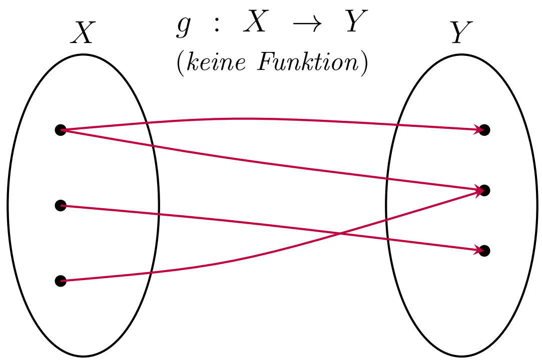
1. Begriffe & Notation von Funktionen
2. Injektivität, Surjektivität & Bijektivität
3. Umkehrfunktion
4. Exkurs: Symmetrie von Funktionen

# 1 Begriffe & Notation von Funktionen

**Kurztheorie.** Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung $f : \mathbb{D} \to Z$

- **Definitionsmenge (Domain)**: $\mathbb{D}$ (mögliche Inputs)
- **Zielmenge**: $Z$
- **Bild-/Wertemenge**: $\mathbb{W} = f(\mathbb{D}) = \{\, f(x) \mid x \in \mathbb{D} \,\}$ (mögliche Outputs)
- **Urbild**: Für $S \subseteq Z$ ist $f^{-1}(S) = \{\, x \in \mathbb{D} \mid f(x) \in S \,\}$
- **Graph**: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{D}\}$



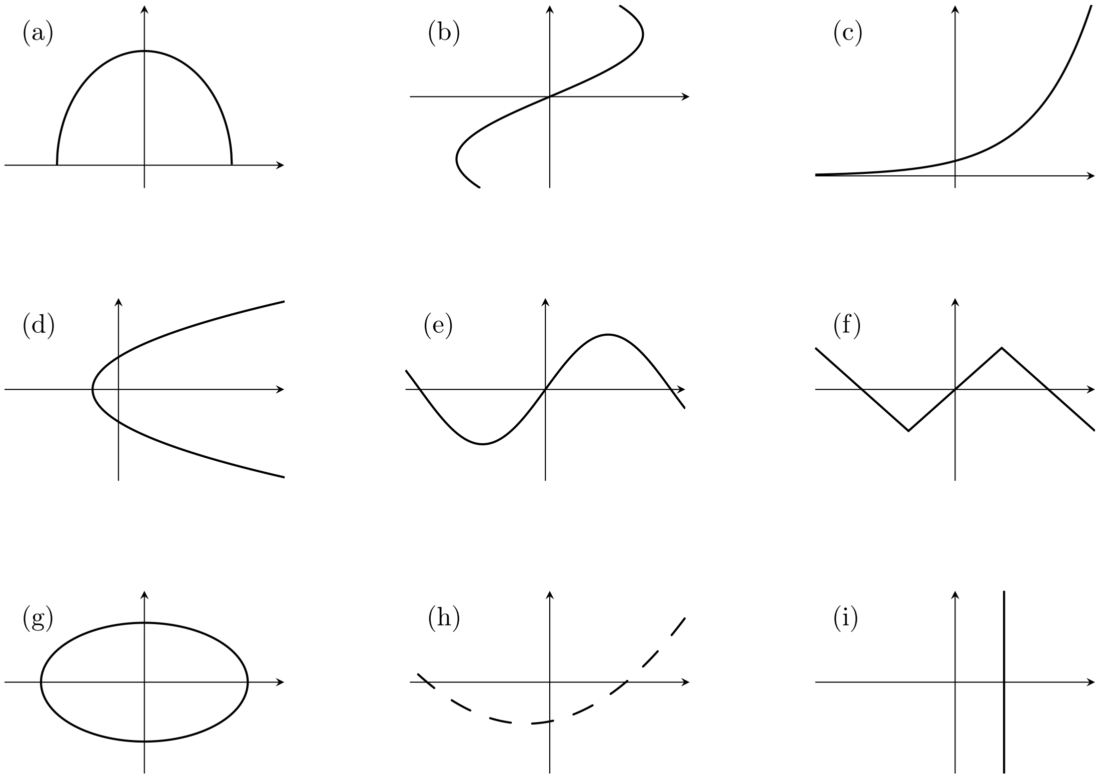




Oben: Funktion mit Bildmenge $\mathbb{W} = f(\mathbb{D})$ (nicht surjektiv). Unten: Zuordnung, die keine Funktion ist.

Mehr Informationen und Aufgaben zu Definitionsmenge und Wertemenge sind in den Blättern von ÜS 1 vorhanden.

**Herausfinden, dass eine Zuordnung eine Funktion ist:**
Jedes x hat höchstens einen y-Wert, niemals mehrere! (sonst ist es nicht eindeutig und daher keine Funktion). Das kann man mit dem **Vertikal-Linien-Test** prüfen.

**Übungsaufgabe: Sind das Funktionen oder keine Funktionen?**




# 2 Injektivität, Surjektivität & Bijektivität

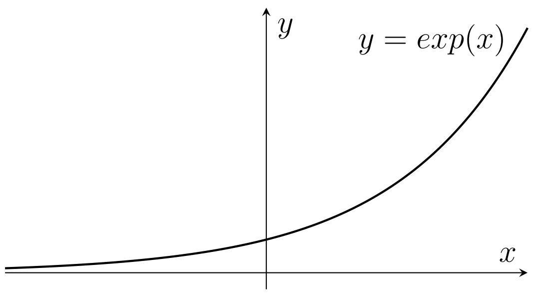
- **Injektiv** (Eindeutigkeit):
  Verschiedene $x$ liefern verschiedene $y$.
  *Merksatz:* Für jedes $y$ (in der Wertemenge) *höchstens* ein $x$
  *Beispiele:* $x \mapsto e^x$ ist injektiv auf $\mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* injektiv (aber z. B. auf $[0, \infty)$ schon).

- **Surjektiv** (Vollständigkeit):
  Jedes $y$ im Zielbereich wird getroffen.
  *Merksatz:* Für jedes $y$ *mindestens* ein $x$
  *Beispiele:* $x \mapsto \sin x$ ist surjektiv auf $[-1, 1]$; $x \mapsto e^x$ ist *nicht* surjektiv auf $\mathbb{R}$ (wohl aber auf $(0, \infty)$).

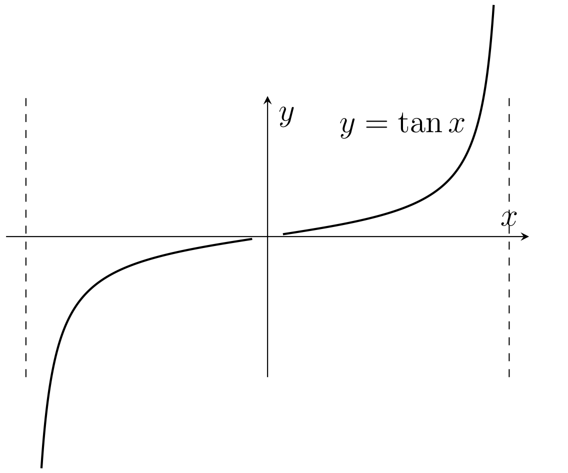
- **Bijektiv** (eins-zu-eins auf den Zielbereich):
  Injektiv *und* surjektiv $\Rightarrow$ Für jedes $y$ *genau* ein $x$
  *Konsequenz:* Es existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1}$ (man kann $x$ und $y$ „tauschen“).
  *Beispiel:* $x \mapsto x^3$ ist bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

*Hinweis:* ***(Horizontal-Linien-Test):*** Ein Graph ist injektiv, wenn jede horizontale Gerade ihn höchstens einmal schneidet.

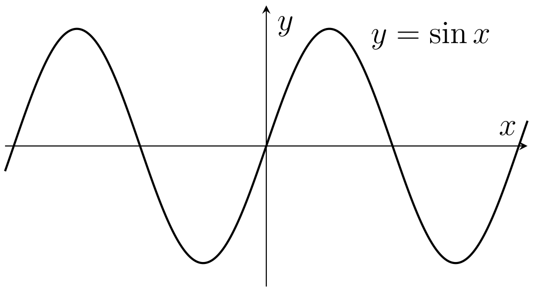
## Aufgaben: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv (Eigenschaft bestimmen)



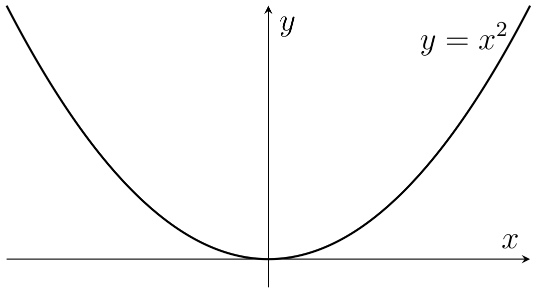

**Gegeben:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
**Eigenschaft:**




**Gegeben:** $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \tan x$
**Eigenschaft:**




**Gegeben:** $h : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $h(x) = \sin x$
**Eigenschaft:**




**Gegeben:** $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j(x) = x^2$
**Eigenschaft:**

## Einschränken von Definitions- und Wertebereich (Beispiel $\sin x$)

- **Ohne Einschränkung:**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x.$$

*Eigenschaft:* weder injektiv noch surjektiv (Bildmenge $[-1, 1] \subsetneq \mathbb{R}$).

- **Nur Wertebereich passend wählen:**

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad f(x) = \sin x.$$

*Eigenschaft:* **surjektiv**, aber nicht injektiv (viele $x$ liefern dasselbe $y$).

- **Nur Definitionsbereich einschränken:**

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x.$$

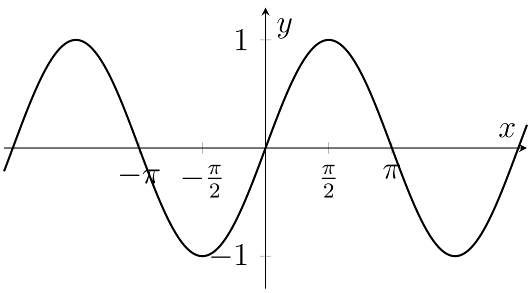
*Hinweis:* Bildmenge bleibt $[-1, 1]$, also nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$.

- **Beides passend einschränken (Standardwahl):**

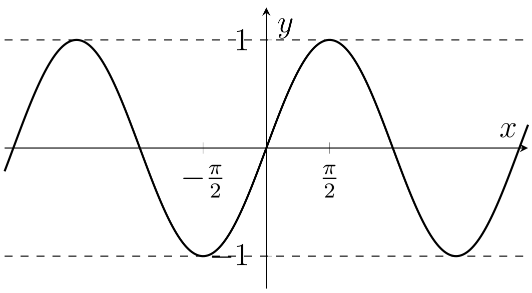
$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1], \qquad f(x) = \sin x.$$

*Eigenschaft:* **bijektiv** (streng monoton steigend $\Rightarrow$ injektiv; Bild $= [-1, 1] \Rightarrow$ surjektiv).

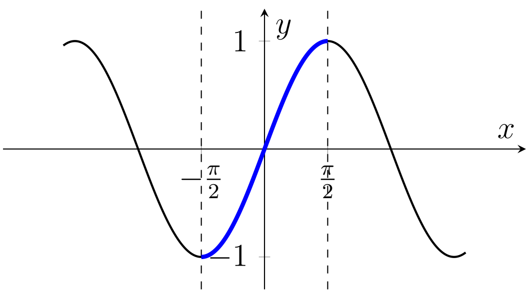
## Beispiel mit $f(x) = \sin x$



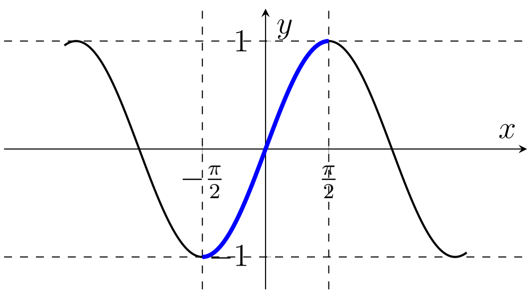

**Gegeben:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
**Eigenschaft:**




**Gegeben:** $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
**Eigenschaft:**




**Gegeben:** $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$
**Eigenschaft:**




**Gegeben:** $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$
**Eigenschaft:**

$\Longrightarrow$ **Durch geeignetes Anpassen des Definitions- und des Wertebereichs lässt sich eine nicht bijektive Funktion bijektiv machen.**

# 3 Umkehrfunktionen

Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ **bijektiv**, dann hat sie eine **Umkehrfunktion** $f^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ mit

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{D}, \qquad f(f^{-1}(y)) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{W}.$$

Dabei werden Definitions- und Wertebereich vertauscht.

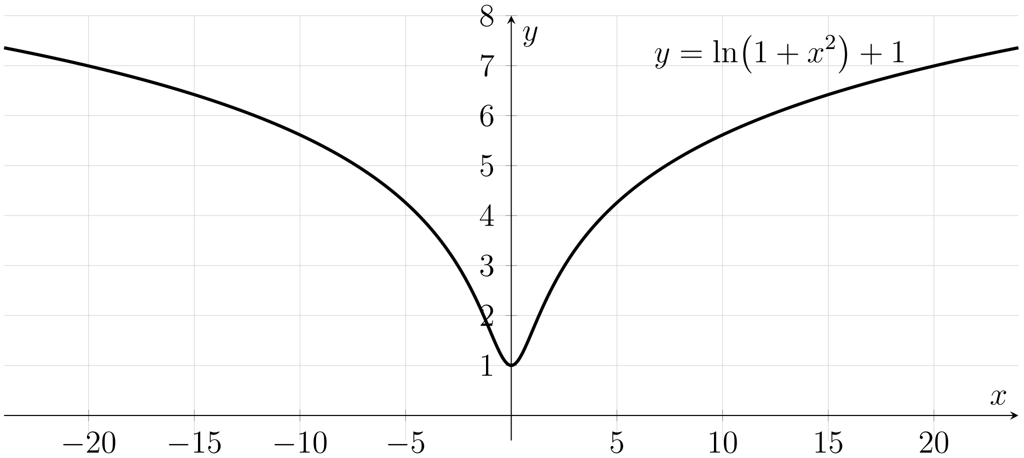
Viele Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind nicht bijektiv. Durch geeignetes Einschränken von Definitions- und Wertebereich kann man $f$ jedoch oft *bijektiv machen*. Dann existiert eine wohldefinierte Umkehrfunktion $f^{-1}$.

## Beispielaufgabe: Umkehrfunktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\big(1 + x^2\big) + 1$$

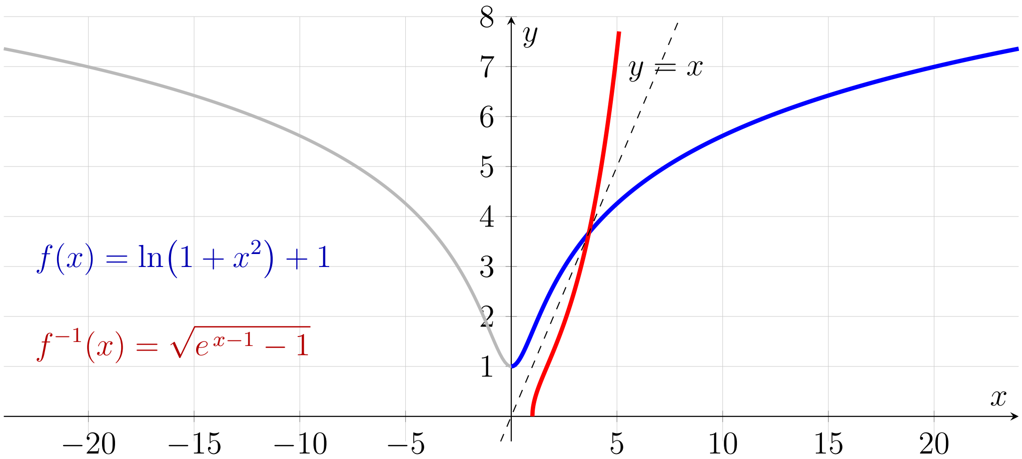
1. Bestimme den **Definitionsbereich** $\mathbb{D}_f$.
2. Bestimme den **Wertebereich** $\mathbb{W}_f = f(\mathbb{D}_f)$.
3. Prüfe kurz: Ist $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ injektiv? surjektiv?
4. Wähle einen sinnvollen **eingeschränkten Definitionsbereich** $D' \subseteq \mathbb{D}_f$, so dass $f : D' \to W'$ bijektiv ist.
5. Bestimme die **Umkehrfunktion** von $f^{-1} : W' \to D'$ und gib ihren Definitions- und Wertebereich an. (Hinweis: Bei der Umkehrfunktion ist Definitions- und Wertebereich vertauscht)



Die möglichen Umkehrfunktionen wären:

| | | |
|---|---|---|
| **Positiver Zweig:** | $f(x) = \ln\big(1+x^2\big)+1$ | $f:\ [0,\infty)\ \longrightarrow\ [1,\infty)$ |
| | $f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x-1}-1}$ | $f^{-1}:\ [1,\infty)\ \longrightarrow\ [0,\infty)$ |
| **Negativer Zweig:** | $f(x) = \ln\big(1+x^2\big)+1$ | $f:\ (-\infty,0]\ \longrightarrow\ [1,\infty)$ |
| | $f^{-1}(x) = -\sqrt{e^{x-1}-1}$ | $f^{-1}:\ [1,\infty)\ \longrightarrow\ (-\infty,0]$ |

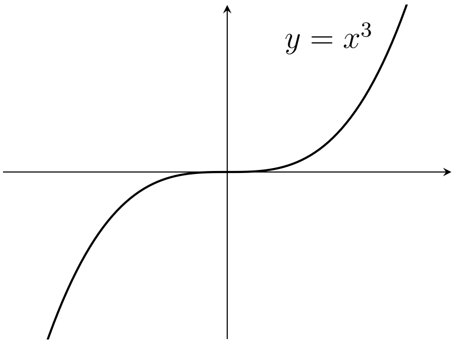
## Positiver Zweig und dessen Umkehrfunktion




**Spiegelung von Funktion und Umkehrfunktion:**
Der Graph von $f$ und der Graph von $f^{-1}$ sind **Spiegelbilder an der Geraden** $y = x$ (*Achsenspiegelung*, keine Punktspiegelung).

## Übungsaufgaben für die Studierenden

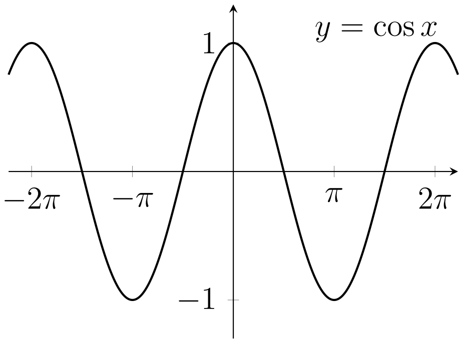
In diesen Kurzaufgaben sollen jeweils ein **bijektiver** Definitions- und Wertebereich angegeben und die **Umkehrfunktion** bestimmt werden.




**Definitionsbereich:**

**Wertebereich:**

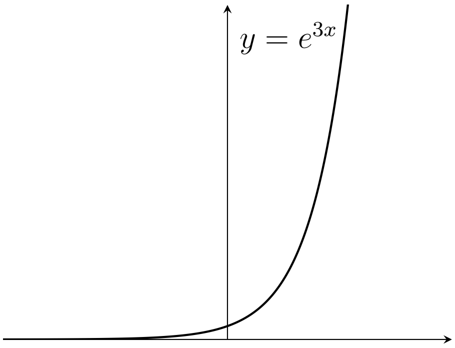
**Umkehrfunktion:**




**Definitionsbereich:**

**Wertebereich:**

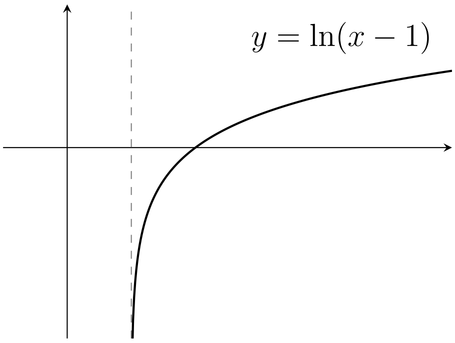
**Umkehrfunktion:**




**Definitionsbereich:**

**Wertebereich:**

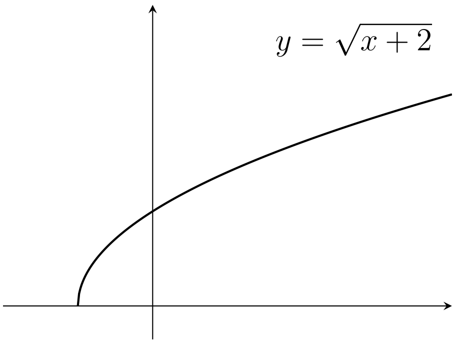
**Umkehrfunktion:**




**Definitionsbereich:**

**Wertebereich:**

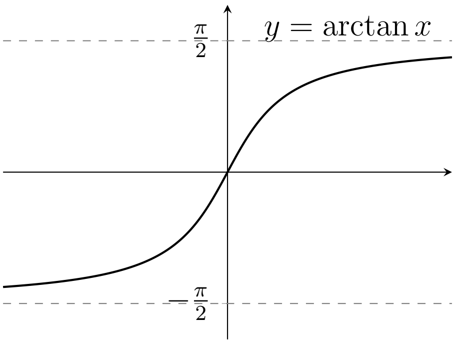
**Umkehrfunktion:**




**Definitionsbereich:**

**Wertebereich:**

**Umkehrfunktion:**




**Definitionsbereich:**

**Wertebereich:**

**Umkehrfunktion:**

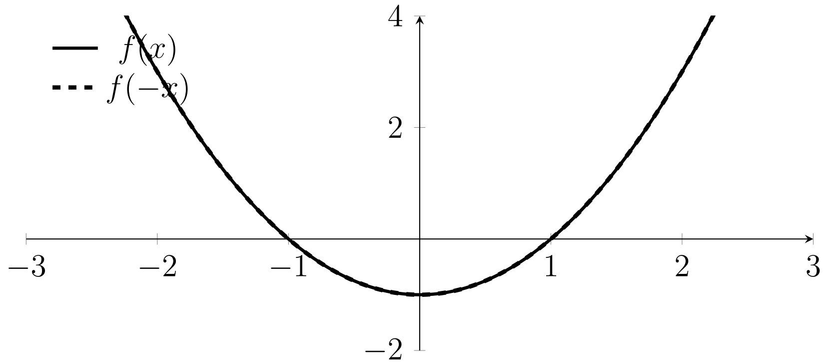
# 4 Exkurs: Symmetrie von Funktionen

Funktionen lassen sich nach Symmetriekriterien in drei Klassen einteilen: *gerade* (Achsensymmetrie an der $y$-Achse), *ungerade* (Punktsymmetrie im Ursprung) oder *keine Symmetrie*. Um Zeit zu sparen verwenden wir die Kürzel **E** (even = gerade), **O** (odd = ungerade) und **N** (none = keine Symmetrie).
*Hinweis: Diese Abkürzungen sind eine vom TA (Visva Loganathan) eingeführte Arbeitsnotation und* ***keine*** *allgemein übliche Konvention in der mathematischen Literatur.*

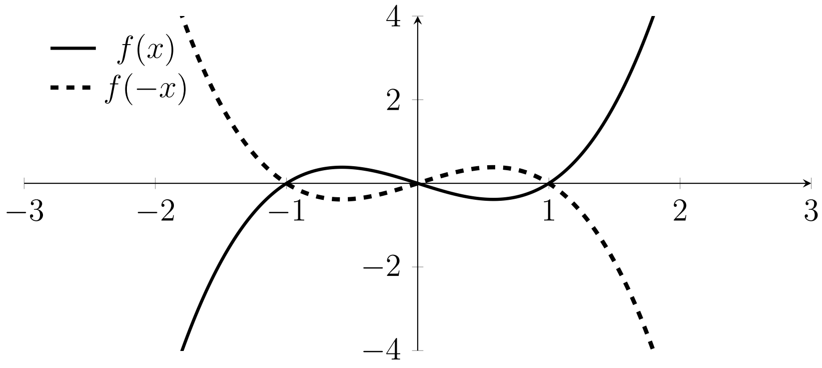
Zum Prüfen der Symmetrie bildet man stets $f(-x)$

- **Gerade Fkt. (E):** $f(-x) = f(x)$
- **Ungerade Fkt. (O):** $f(-x) = -f(x)$
- **Keine Symmetrie (N):** $f(-x)$ erfüllt keine der beiden obigen Beziehungen

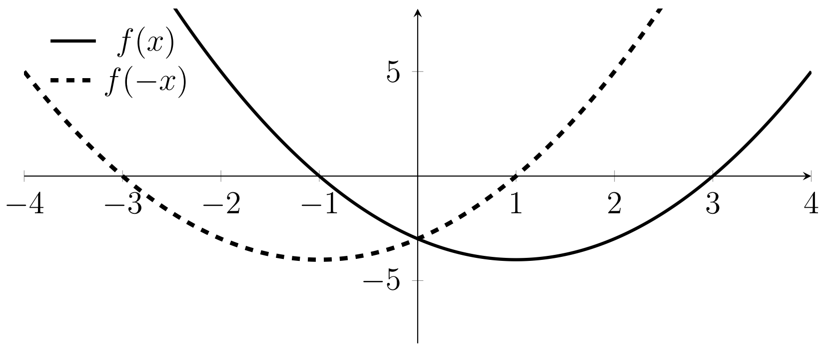
## Beispiel (gerade): $f(x) = x^2 - 1$



**Beispiel (ungerade):** $f(x) = x^3 - x$




**Beispiel (keine Symmetrie):** $f(x) = x^2 - 2x - 3$



## Schnellreferenz: typische Symmetrien

- **Potenzfunktionen:** $x^n$ ist **E** für gerades $n \in \mathbb{Z}$, **O** für ungerades $n \in \mathbb{Z}$. (Für nicht-ganzzahliges $n$ ist der Definitionsbereich i. d. R. nicht punktsymmetrisch $\Rightarrow$ keine Klassifikation.)
- **Reziproke Potenzen:** $x^{-n} = 1/x^n$ erben dieselbe Parität wie $x^n$ (auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$): gerade für gerades $n$, ungerade für ungerades $n$.
- **Absolutwert:** $|x|$ ist **E**.

**Gerade (E)**

- $x^{2k}$, $1/x^{2k}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$
- Konstante Zahl $c \in \mathbb{R}$
- $|x|$, $|\,g(x)\,|$ (falls $g$ ungerade)
- $\cos x$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$
- $e^{ax^2}$ (mit $a \in \mathbb{R}$)
- $\ln |x|$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Ungerade (O)**

- $x^{2k+1}$, $1/x^{2k+1}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$
- $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$
- $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
- $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\tanh x$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$
- $\operatorname{sgn} x$ (Vorzeichenfunktion)
- $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{artanh} x$

**Keine Symmetrie (N)**

- $e^x$, $\ln x$ (nur $x > 0$)
- $\arccos x$, $\operatorname{arccot} x$ (auf Standard-Definitionen)
- $\operatorname{arcosh} x$ (Domain $x \geq 1$)
- Linearkombinationen mit gemischter Parität, z. B. $x^2 - 3x - 1$
- Funktionen mit nicht punktsymmetrischem Definitionsbereich, z. B. $\sqrt{x}$

*Hinweis:* Zusammengesetzte Funktionen erben die Symmetrie oft aus den Bausteinen, z. B. $|\sin x|$ ist **E**, $\sin^2 x$ ist **E**; Details stehen in den Rechen- und Verkettungsregeln.

## Symmetrie (E/O/N): Rechenregeln

**Kontext:** Wir kombinieren zwei (Teil-)funktionen $f$ und $g$ zu einer neuen Funktion mittels Addition, Multiplikation oder Division. Für diese Übersicht genügen die drei Fälle $E \circ E$, $E \circ O$, $O \circ O$; denn es gilt schlicht $E \circ O = O \circ E$. Das gilt gleichermassen für Addition, Multiplikation und Division. Bei der Division $f/g$ gilt ebenfalls noch $g(x) \neq 0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Addition** $(f+g)$ : | $E+E=E$ | $E+O=\mathbf{N}$ | $O+O=O$ |
| **Multiplikation** $(f \cdot g)$ : | $E \cdot E=E$ | $E \cdot O=O$ | $O \cdot O=E$ |
| **Division** $(f/g)$ : | $E/E=E$ | $E/O=O$ | $O/O=E$ |

*Hinweis.* Treffen in einer Operation Funktionen der Klasse **N** (keine Symmetrie) auf, ist das Ergebnis *im Allgemeinen* wieder **N**. Ausnahmen sind möglich (z. B. spezielle Kombinationen, die zufällig **E** oder **O** ergeben).

## Übung: Symmetrie klassifizieren (E/O/N)

Bestimme für jede Funktion, ob sie **E** (gerade), **O** (ungerade) oder **N** (keine Symmetrie) ist.

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \sin x - x$
4. $f(x) = \cos x + x$
5. $f(x) = \sin^2 x$
6. $f(x) = \tan x$
7. $f(x) = \arctan x \cdot \arccos x$
8. $f(x) = \ln(|x|) + 2$
9. $f(x) = \ln(x) + 2$
10. $f(x) = |x| + x$

## Symmetrie: Verkettete Funktionen

Sei $f = u \circ v = u(v(x))$ mit äusserer Funktion $u$ und innerer Funktion $v$. Die Parität von $f$ ergibt sich aus der folgenden Übersicht:

| | $v$ ist **E** | $v$ ist **O** | $v$ ist **N** |
|---|---|---|---|
| $u$ ist **E** | **E** | **E** | **N** |
| $u$ ist **O** | **E** | **O** | **N** |
| $u$ ist **N** | **E** | **N** | **N** |

**Kurzmerker:**

Innere gerade $\Rightarrow$ Gesamt gerade.

Innere ungerade $\Rightarrow$ Gesamtsymmetrie folgt der äusseren.

Innere ohne Symmetrie $\Rightarrow$ keine feste Symmetrie.

## Übung: Symmetrie mit Verkettung & Kombination (E/O/N)

Bestimme für jede Funktion, ob sie **E** (gerade), **O** (ungerade) oder **N** (keine Symmetrie) ist. Achte auf den Definitionsbereich.

1. $f(x) = \cos\big(x^2\big)$
2. $f(x) = \sin\big(x^3\big)$
3. $f(x) = \arctan\big(\sin(x^2)\big)$
4. $f(x) = \tan\big(\cos x \cdot \sin x\big)$
5. $f(x) = \cos x + \sin^2 x$
6. $f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{x} \quad (x \neq 0)$
7. $f(x) = e^{\cos(x)}$
8. $f(x) = x \cdot \tan\big(e^{\cosh(x)}\big)$
9. $f(x) = \ln\big(|\tan(x)|\big)$
10. $f(x) = \dfrac{\arctan(x^3)}{1 + x^2}$
11. $f(x) = \sin^5(\cos x)$