Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 5

Reihen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 20.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Geometrische Reihen
2. Konvergenzkriterien (Quotient, Wurzel, Vergleich)
3. Teleskopsummen
4. Potenzreihen & Konvergenzradius

1 Geometrische Reihe (Intuition & Übung)

Was ist eine geometrische Reihe?

Eine *geometrische Reihe* hat die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n \quad \text{mit Startwert } a \in \mathbb{R} \text{ und Faktor } q \in \mathbb{R}.$$

Man addiert also immer wieder den gleichen Anteil der vorherigen Grösse dazu (jeder neue Summand ist mit dem festen Faktor q gegenüber dem vorherigen skaliert).

Intuition Stell dir vor, du füllst einen Eimer: Beim ersten Schritt kommt die Menge a hinein. Beim zweiten Schritt nur noch der Anteil q davon, dann q^2 vom ersten usw. Wenn $|q| < 1$, werden die Nachlieferungen schnell sehr klein ($q^n \to 0$) – deshalb nähert sich die Gesamtmenge einem festen Wert an.

Merksatz (Wertformel)

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}, & q \neq 1, \\ N+1, & q = 1. \end{cases}$$

Für $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Für $|q| \geq 1$ *konvergiert* die Summe nicht (sie hat also keinen endlichen Grenzwert).

Kurzableitung (ohne Formalismus) Betrachte die Partialsumme $S_N = \sum_{k=0}^{N} q^n$ Dann

$$(1-q)S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = 1 - q^{N+1}$$

Also $S_N = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$. Für $|q| < 1$ ist $q^{N+1} \to 0$, daher $S_N \to \dfrac{1}{1-q}$

Checkliste zum Erkennen

- Sind die Summanden von der Form (Konstante) $\cdot\, q^n$ (ggf. nach Ausklammern/Indexverschiebung)?
- Gilt $|q| < 1$? $\Rightarrow$ Summe konvergiert und hat Wert $\frac{1}{1-q}$
- Gilt $|q| \geq 1$? $\Rightarrow$ keine Konvergenz

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Hinweis: Ziel ist es, *schnell* zu erkennen, ob eine geometrische Reihe vorliegt und, falls ja, den Wert zu bestimmen. Begründungen bitte kurz in Worten notieren.

1. **Warm-up: Identifikation und Wert**
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}5\cdot(-0.2)^n$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{20}7\cdot 1^n$
2. **In Form bringen**
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 3^n}{6^{n+2}}$
3. **Konvergenz ja/nein?**
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$
4. **Konvergenz** Für welche reellen x konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$? Bestimme (falls konvergent) ihren Wert in Abhängigkeit von x.

Typische Fehlerquellen

- q falsch identifiziert (z. B. Konstante nicht ausgeklammert oder Index nicht passend verschoben).
- Randfall $|q| = 1$ übersehen: Die Wertformel $\frac{a}{1-q}$ gilt nur für $|q| < 1$.
- Verwechslung von „geometrisch“ (fester Faktor) und „arithmetisch“ (feste Differenz).

2 Konvergenzkriterien (Quotient, Wurzel, Vergleich)

Vorweg: notwendige Bedingung & Divergenztest

Notwendig, aber nicht hinreichend. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge der Summanden einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\textbf{Notwendig:}\quad a_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, dann kann sich die Partialsumme $\sum_{k=1}^{N} a_k$ nicht stabilisieren ⇒ die Reihe *divergiert sicher.*

Divergenztest (n-ter Glied-Test).

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Achtung: Umgekehrt gilt das nicht! Aus $a_n \to 0$ folgt *nicht* automatisch Konvergenz.

Was bedeutet „genügend schnell"? Die Summanden müssen so rasch gegen 0 gehen, dass die Summe der „Restmengen" endlich bleibt. Ein hilfreicher Vergleich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergiert,} & p > 1, \\ \text{divergiert,} & p \leq 1, \end{cases} \qquad \text{(sog. } p\text{-Reihen).}$$

- $\sum \frac{1}{n}$ $(p = 1)$: *harmonische Reihe* — **divergiert**, obwohl $1/n \to 0$.
- $\sum \frac{1}{n^2}$ $(p = 2)$: **konvergiert** — hier ist das „Gegen-0-Gehen" schnell genug.

Take-away.

- Prüfe zuerst: $\lim a_n = 0$? Falls $\neq 0$ ⇒ sofort Divergenz.
- Wenn $a_n \to 0$, entscheide mit *Kriterien*, ob es „schnell genug" ist.

Warum Kriterien?

Nicht jede Reihe ist geometrisch. Kriterien helfen, schnell über *Konvergenz* zu entscheiden, ohne die Summe explizit zu kennen. Im 1. Semester arbeiten wir überwiegend mit *nichtnegativen* Summanden; bei Vorzeichenwechseln wenden wir die Kriterien auf $|a_n|$ an (Frage: *absolute* Konvergenz).

Merke: Wenn ein Kriterium den Grenzwert $= 1$ liefert, sagt es *nichts* (inconclusive).

Quotientenkriterium ("Fakultäten/Exponentialterme")

Intuition. Vergleicht das *relative Wachstum* aufeinanderfolgender Summanden:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert.
- $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert.
- $L = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.

Gut bei: $n!$, c^n, Produkten daraus.

Beispielaufgabe $a_n = \dfrac{n!}{3^n \cdot n^n}$. Bestimme L und entscheide.

Wurzelkriterium ("globaler Blick")

Intuition. Misst die *durchschnittliche* Wachstumsrate eines Summanden:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- $R < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert absolut.
- $R > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert.
- $R = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.

Gut bei: Ausdrücken vom Typ $(\cdot)^n$, Potenzreihen.

Beispielaufgabe $a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$. Untersuche mit dem Wurzelkriterium.

Vergleichskriterium (“gegen bekannte Reihen schätzen”)

Intuition Schätze a_n durch eine *bekannte* Folge b_n, z. B. eine p-Reihe $\sum \frac{1}{n^p}$ oder eine geometrische Reihe.

- **Direkter Vergleich:** $0 \le a_n \le b_n$ für alle grossen n.
  - $\sum b_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum a_n$ konvergiert.
  - $\sum a_n$ divergiert $\Rightarrow \sum b_n$ divergiert.
- **Grenzwertvergleich:** Falls $a_n, b_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty)$, dann konvergieren/divergieren beide gleichzeitig.

Beispielaufgabe Vergleiche $a_n = \dfrac{3n+1}{n^2+5}$ mit einer geeigneten p-Reihe.

Welche Strategie wann?

- **Fakultäten / c^n:** zuerst *Quotient*.
- **Potenzartige Terme $(\cdot)^n$ / Potenzreihen:** *Wurzel*.
- **Rationale Funktionen in n:** *Vergleich* mit p-Reihen.
- **Grenzfälle / unklar:** *Grenzwertvergleich* versuchen.

Typische Stolpersteine

- Ergebnis $= 1$ beim Quotient-/Wurzelkriterium $\Rightarrow$ *keine* Aussage.
- Vergleich nur für *grosse* n nötig: Startterme ändern die Konvergenz nicht.
- Bei Vorzeichenwechseln Kriterien auf $|a_n|$ anwenden (absolute Konvergenz).

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Quotientenkriterium

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^{\,n}\, n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

Wurzelkriterium

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$

Vergleich / Grenzwertvergleich

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n+7}{n^2+n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n}$

Mix & Match

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^{\,n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\,n/2}}$

3 Teleskopsummen

Was ist die Idee?

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst *teleskopierend*, wenn sich die Partialsummen stark vereinfachen, weil sich viele Terme gegenseitig aufheben. Typischer Fall: a_n lässt sich als $\boxed{b_n - b_{n+1}}$ schreiben.

Kurzableitung. Für die Partialsumme $S_N = \sum_{n=1}^{N}(b_n - b_{n+1})$ gilt

$$S_N = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_N - b_{N+1}) = \boxed{b_1 - b_{N+1}}.$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ existiert, dann konvergiert die Reihe mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - L$.

Warum praktisch? Man muss dann *nicht* kompliziert summieren, sondern nur b_1 und den Grenzwert von b_{N+1} bestimmen.

Teleskopieren erkennen (Checkliste)

- $a_n = b_n - b_{n+1}$ direkt erkennbar? (z. B. durch Umformen)
- Brüche partiell zerlegen: $\dfrac{1}{n(n+k)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+k}$.
- Logarithmen/Produkte: $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$, $\prod \frac{n+1}{n}$ klappt oft auch.
- Grenzverhalten von b_n prüfen (existiert L?).

Beispielaufgabe

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ $\quad\to$ fast alles hebt sich weg.

Stolpersteine

- b_n falsch gewählt $\Rightarrow$ kein Aufheben sichtbar.
- Grenzterm b_{N+1} vergessen: erst $S_N = b_1 - b_{N+1}$, dann $N \to \infty$.
- Partielle Bruchzerlegung nicht sauber (Vorzeichen/Parameter verwechseln).

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Hinweis: Bringe die Summanden in die Form $b_n - b_{n+1}$ (oder benutze Log-Regeln). Ziel: Wegteleskopieren erkennen, Randterme sauber bestimmen.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$

   Tipp: Es teleskopiert bereits so (weiteres umformen nicht nötig).

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} =$

   Tipp: $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

   Tipp: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n.$

4 Potenzreihen und Konvergenzradius

Definition

Eine **Potenzreihe um den Entwicklungspunkt** $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n,$$

wobei c_n die **Koeffizienten** heissen. Für jedes feste x ist das eine gewöhnliche Reihe.

Konvergenzradius und -intervall

Es gibt einen **Konvergenzradius** $R \in [0, \infty]$ mit:

$$|x-a| < R \;\Rightarrow\; \text{konvergiert absolut}, \qquad |x-a| > R \;\Rightarrow\; \text{divergiert}.$$

Das zugehörige **Konvergenzintervall** ist $[a-R,\, a+R]$, die **Randpunkte** $|x-a| = R$ müssen *separat* geprüft werden.

Wie findet man R?

Quotiententest (für Potenzreihen). Wenn der Grenzwert existiert,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|,$$

dann gilt

$$\boxed{R = \frac{1}{L}} \qquad (\text{mit } 1/0 = \infty,\ 1/\infty = 0).$$

Intuition: Für $|x-a| < 1/L$ verhalten sich die Terme wie in einer geometrischen Reihe.

Wurzeltest (gleichwertig). Mit

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{M}}.$$

Beispielaufgabe

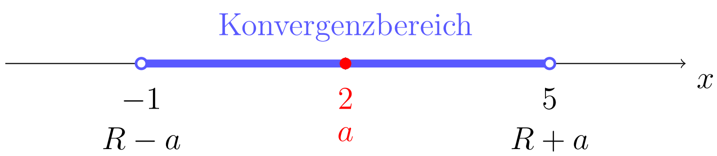
Finde den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$ heraus.

Konvergenzradius (Visualisierung an einem Beispiel)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}.$$

Hier sind die Koeffizienten $c_n = 3^{-n}$. Mit dem Quotiententest $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{3}$ erhalten wir den **Konvergenzradius** $R = 3$. Die Reihe *konvergiert* also für $|x-2| < 3$, d. h. $x \in (-1, 5)$. Die Randpunkte $x = -1$ und $x = 5$ müssen separat geprüft werden.



Lesen der Grafik: Der blaue Balken zeigt alle x mit $|x - a| < R$, wo die Reihe konvergiert. Die offenen Kreise markieren die Randpunkte $|x - a| = R$, die separat geprüft werden müssen.

Aufgaben: Bestimmen Sie den Konvergenzradius R

Hinweis: In allen Fällen existiert der obige Grenzwert direkt.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (x-1)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n (x+2)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n\,(x-3)^n$