Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 4

Folgen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 13.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Folgen
2. Beschränktheit
3. Monotonieverhalten
4. Grenzwert & Konvergenz
5. Analytische Ermittlung von Grenzwerten
6. Sandwich-Theorem

1 Folgen

Definition & Notation

Eine Folge ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n). Typische Folgen:

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}, \qquad a_n = c^n, \qquad a_n = \sqrt[n]{x}, \qquad a_n = (-1)^n \cdot b_n$$

Typische Beispiele

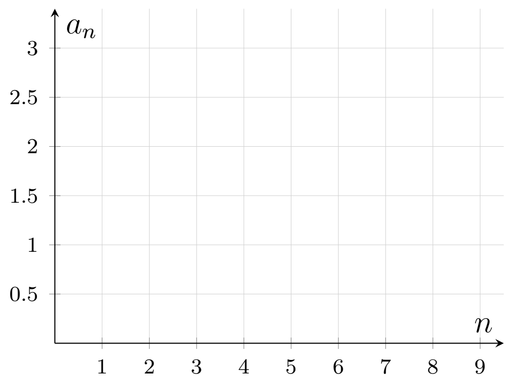
- Rationale Folge: $a_n = \dfrac{3n^2+1}{n^3+2}$
- Potenz-/Wurzelfolge: $b_n = n^{1/n}$, $\quad c_n = \sqrt[n]{5}$
- Alternierend: $d_n = (-1)^n$, $\quad e_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

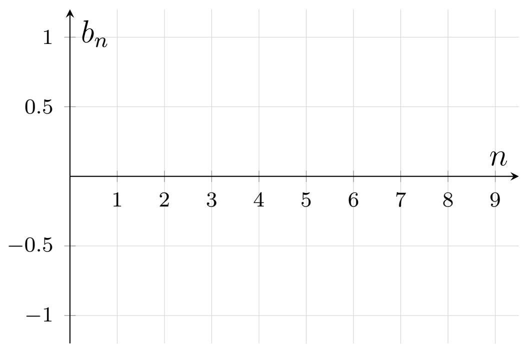
Beispielaufgabe

Gegeben ist $a_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ und $b_n = (-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

1. Bestimme die ersten sechs Terme von a_n und b_n.

2. Beschreibe jeweils in einem Satz das qualitative Verhalten für grosse n (z. B. „wächst/-fällt“, „pendelt“, „stabilisiert sich“).





2 Beschränktheit von Folgen

Definition

Eine Folge (a_n) heisst *nach oben beschränkt*, falls es $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (obere Schranke). *Nach unten beschränkt*, falls $a_n \geq c$ für alle n (untere Schranke). *Beschränkt* bedeutet: es existieren $c \leq C$ mit $c \leq a_n \leq C$ für alle n (obere & untere Schranke).

Supremum/Infimum als Werkzeug

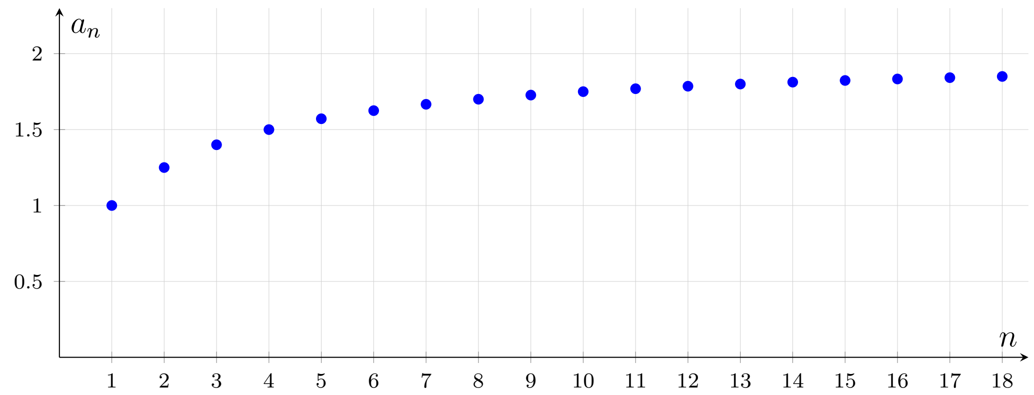
Für die Menge der Folgenterme $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$:

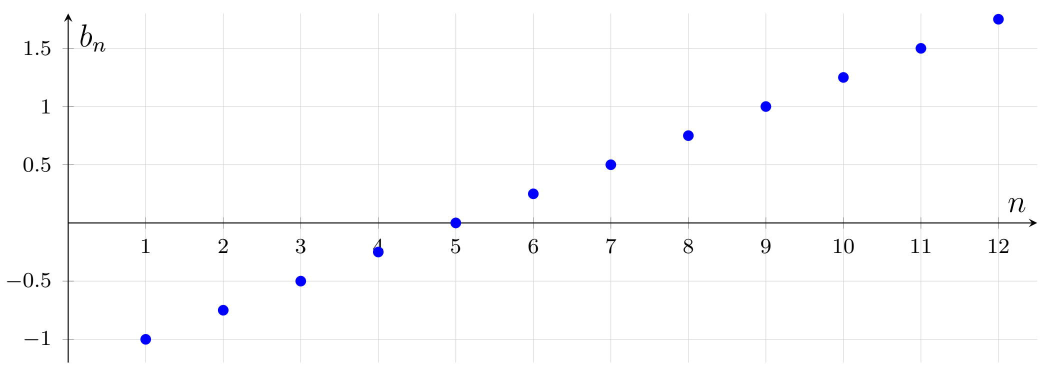
- Ist (a_n) nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$.
- Ist (a_n) nach unten beschränkt, so existiert $\inf M$.

(Zur Erinnerung: Supremum und Infimum wurden bereits in ÜS 1 eingeführt; hier verwenden wir sie nur. Ausserdem genügen zur Betrachtung der Schranken Supremum und Infimum; ob zusätzlich ein Maximum bzw. Minimum vorliegt, muss nicht ermittelt werden.)

Beispielaufgaben

Schranken für $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ und $b_n = \dfrac{n-5}{4}$





3 Monotonieverhalten von Folgen

Idee

Eine Folge (a_n) heisst *monoton*, wenn ihre Werte ohne Richtungswechsel entweder nur steigen oder nur fallen. Wir formulieren das hier bewusst einfach/intuitiv (ohne Beweise).

Vier Fälle in Kürze

Typ	**In Worten**	**Rechenkriterium**
Monoton steigend	Jedes Folgeglied ist grösser oder mindestens gleich gross wie die vorherigen.	$a_{n+1} \geq a_n$
Streng monoton steigend	Jedes Folgeglied ist strikt grösser als die vorherigen.	$a_{n+1} > a_n$
Monoton fallend	Jedes Folgeglied ist kleiner oder höchstens gleich gross wie die vorherigen.	$a_{n+1} \leq a_n$
Streng monoton fallend	Jedes Folgeglied ist strikt kleiner als die vorherigen.	$a_{n+1} < a_n$

Praktische Checks

- Differenzen-Test: $\Delta_n := a_{n+1} - a_n$. Gilt $\Delta_n \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle n, dann ist die Folge monoton steigend (bzw. fallend).
- Für positive Folgen kann man auch Quotienten anschauen: $q_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. $q_n \geq 1$ (bzw. ≤ 1) für alle $n \Rightarrow$ monoton steigend (bzw. fallend).
- Häufig reicht „monoton *ab* einem N_0“ (d. h. für alle $n \geq N_0$) – das ist in Anwendungen genauso nützlich.

Spezialfall: alternierende Folgen

Eine Folge heisst *alternierend*, wenn die Vorzeichen der Terme abwechseln:

$$a_n = (-1)^n \, u_n \qquad (u_n \geq 0).$$

Anschaulich „springt“ die Folge zwischen positiven und negativen Werten hin und her. **Alternierende Folgen sind in der Regel *nicht monoton.***

4 Konvergenz über den Grenzwertbegriff

Definition

Sei (a_n) eine reelle Folge. Wir sagen, *die Folge konvergiert gegen $L \in \mathbb{R}$*, wenn der Grenzwert existiert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Kurz: *Existiert ein (endlicher) Grenzwert, dann ist die Folge konvergent* – und zwar genau gegen diesen Wert L. (Keine ε–N-Formalismen hier nötig.)

Terminologie

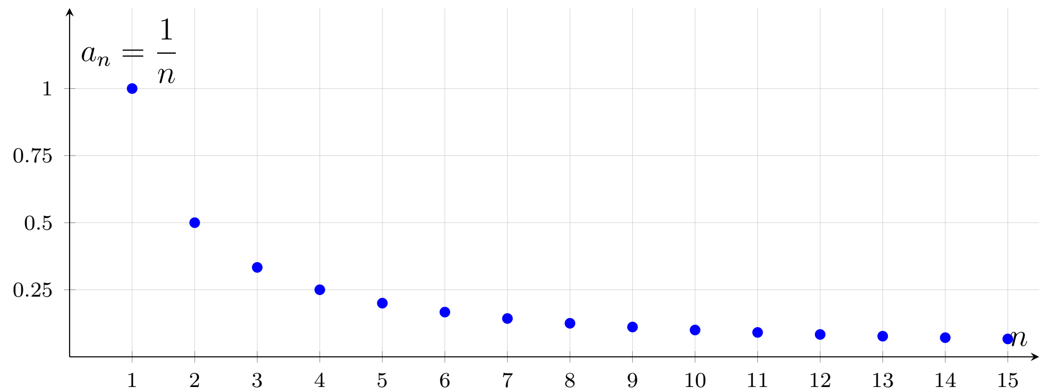
- **Konvergent:** $\exists\, L \in \mathbb{R}$ mit $\lim a_n = L$.
- **Divergent:** Kein endlicher Grenzwert. Typische Fälle:
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (wächst „nach oben hinaus"),
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (fällt „nach unten hinaus"),
  - *oszillierend* (z. B. wechselnde Vorzeichen oder Hin-und-her-Springen ohne Annäherung, alternierende Funktionen).

Wichtige Hinweise

- Der Grenzwert (falls vorhanden) ist **eindeutig**.
- $\lim a_n = L$ impliziert automatisch: die Folge ist **beschränkt** (ab einem gewissen n) und „stabilisiert" sich in der Nähe von L.

Nützliches Existenz-Kriterium

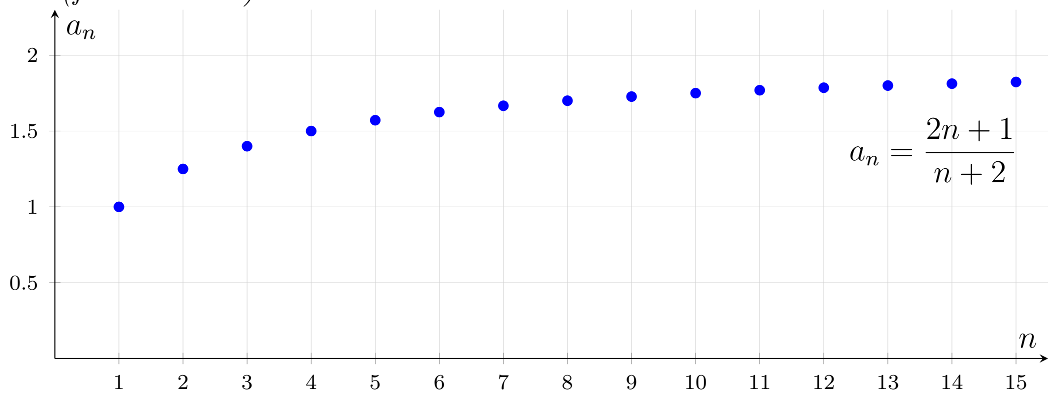
Ist eine Folge **monoton** und **beschränkt**, dann *existiert* ein (endlicher) Grenzwert. Damit kann man Konvergenz oft *ohne* konkretes Ausrechnen eines Grenzwerts begründen.



Streng monoton fallende und *nach unten beschränkte* Folge; die untere Schranke (Infimum) ist der Grenzwert, hier 0.

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Ermittle grafisch für jede Folge die Beschränktheit, Monotonie, das Konvergenzverhalten und (falls existent) den Grenzwert.



Eigenschaften (a_n)

Beschränktheit:

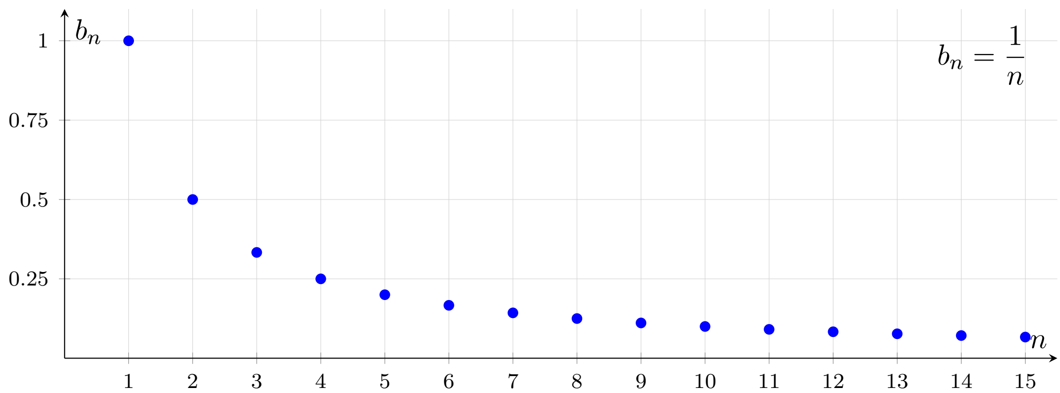
Obere Schranke:

Untere Schranke:

Monotonie:

Konvergenz:

Grenzwert:



Eigenschaften (b_n)

Beschränktheit:

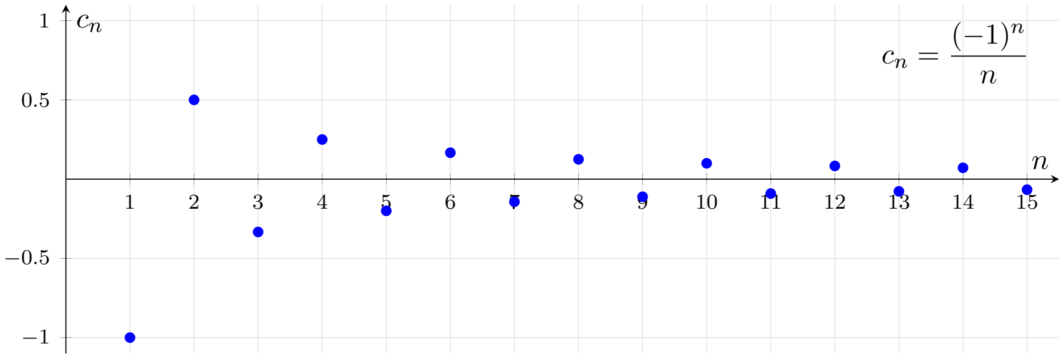
Obere Schranke:

Untere Schranke:

Monotonie:

Konvergenz:

Grenzwert:



Eigenschaften (c_n)

Beschränktheit:

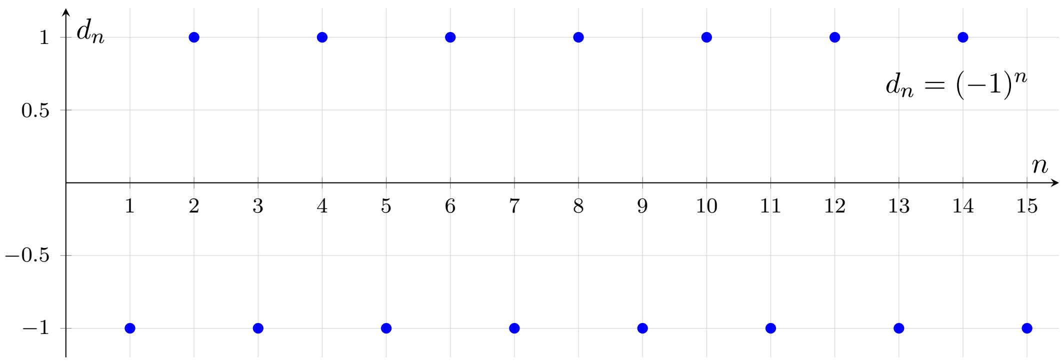
Obere Schranke:

Untere Schranke:

Monotonie:

Konvergenz:

Grenzwert:



Eigenschaften (d_n)

Beschränktheit:

Obere Schranke:

Untere Schranke:

Monotonie:

Konvergenz:

Grenzwert:

5 Analytische Ermittlung von Grenzwerten

Worum geht's?

Viele Folgenlimits sind *offensichtlich* (z. B. $\lim_{n\to\infty}$ von $2n$, $n^2 \to +\infty$). Für den Rest reichen ein paar einfache Werkzeuge. Details zu Grenzwerten von *Funktionen* kommen später im Kurs; hier geht es nur um schnelle, übungsorientierte Regeln für *Folgen.*

Brüche aus Polynomen (Zähler/Nenner in n)

Rezept: Durch die höchste Potenz von n im Nenner teilen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \deg p < \deg q, \\ \dfrac{\text{Leitkoeff}(p)}{\text{Leitkoeff}(q)}, & \deg p = \deg q, \\ \pm\infty, & \deg p > \deg q. \end{cases}$$

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-7}{2n^3+9n} = \frac{5}{2}.$$

Wachstumshierarchie (wer „gewinnt"?)

Wenn sowohl Zähler als auch Nenner gegen unendlich wachsen, entscheide nach Wachstumsgeschwindigkeit. Für $n \to \infty$ gilt (Faustregel, von schnell nach langsam):

$$\boxed{n^n \;\gg\; n! \;\gg\; a^n\ (a>1) \;\gg\; n^k\ (k>0) \;\gg\; \log n}$$

Konsequenzen für $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$:

- **Nenner** wächst *strikt schneller* $\Rightarrow$ Grenzwert 0.
- **Zähler** wächst *strikt schneller* $\Rightarrow +\infty$ (bzw. $-\infty$ je nach Vorzeichen).

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (\text{Nenner } n^n \text{ gewinnt}), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Nützliche „Sonderlimits" für die Formelsammlung

Diese tauchen oft auf und sind nicht sofort offensichtlich:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1\ (x>0), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

(Die letzten beiden helfen häufig beim Umformen.)

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 + n} =$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} =$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} =$

6 Sandwich-Theorem

Intuition

Manchmal ist ein direkter Grenzwert schwer zu berechnen. Dann klemmen wir die Folge (b_n) *von oben und unten* zwischen einfacheren Folgen ein — **wie ein Sandwichbelag zwischen zwei Scheiben Brot.**

$$a_n \;\le\; b_n \;\le\; c_n \qquad \text{für alle (hinreichend grossen) } n$$

Haben die äusseren Folgen denselben Grenzwert, so konvergiert b_n auch gegen diesen Wert.

Aussage

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \text{für alle } n \ge N_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Nützliche Folgerung Wenn $|b_n| \le a_n$ und $a_n \to 0$, dann folgt sofort $b_n \to 0$. (Der Trick für „oszillierende, aber immer kleinere“ Terme.)

Wann Sandwich-Theorem anwenden? Wenn sich ein Ausdruck elegant zwischen zwei *bekannte* Folgen klemmen lässt (z. B. über Betrag, Dreiecksungleichung, oder algebraische Umformung).

Beispielaufgabe Sandwich-Theorem

Bestimme den Grenzwert L dieser Folge:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(b_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$