Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 3

Komplexe Zahlen II

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 06.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Potenzen komplexer Zahlen (De Moivre)
2. Wurzeln komplexer Zahlen (n-te Wurzeln)
3. Quadratische Gleichungen über $\mathbb{C}$
4. Polynomdivision & Fundamentalsatz der Algebra

1 Potenzen komplexer Zahlen

Kurz-Intuition

- Für $z \neq 0$ schreibe $z = r\,e^{i\varphi}$ (Betrag $r > 0$, Winkel φ).
- **De Moivre:**
$$(re^{i\varphi})^n = r^n\,e^{in\varphi} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
- *Warum Polarform?* Potenzen werden damit „einfach“: Betrag hoch n, Winkel mal n. In Normalform $(a+ib)^n$ würde man viel ausmultiplizieren müssen.
- Nützliche Folgerungen: $|z^n| = |z|^n$ und $\arg(z^n) \equiv n\,\arg(z) \pmod{2\pi}$.

Beispielaufgabe

Aufgabe: Berechne $(1+i)^{10}$ schnell.

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Erst in Polarform umschreiben, dann De Moivre anwenden.

1. $(-\sqrt{3}+i)^6$ (Hinweis: $r = 2$, $\varphi = 5\pi/6$.)

2. $(1-i)^8$ (kurz begründen, ob das Resultat reell ist)

3. Bestimme Betrag und Argument von $(2e^{i\pi/3})^9$ (ohne Ausmultiplizieren)

2 Wurzeln komplexer Zahlen

Intuition

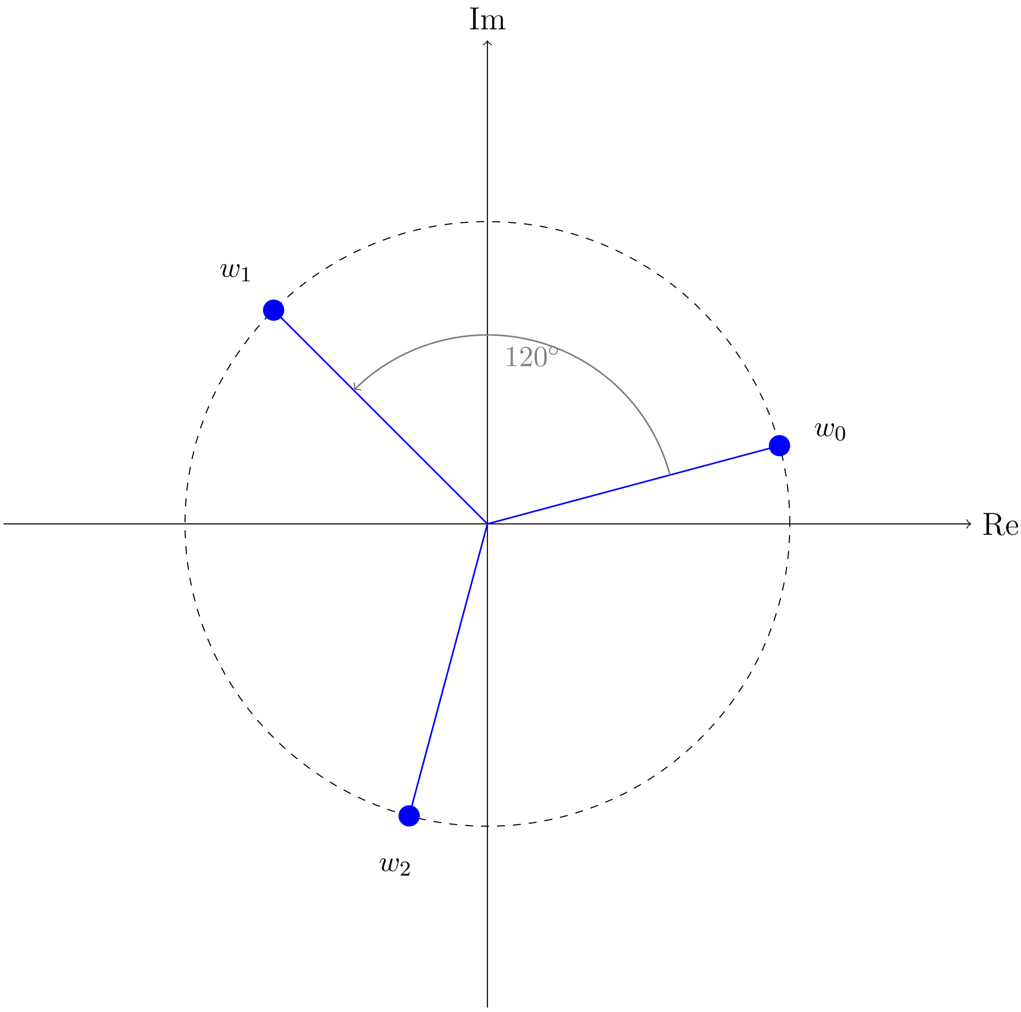
- Polarform: $z = r\,e^{i\varphi}$ mit $r = |z| > 0$ und $\varphi = \arg z$.
- n-te Wurzeln von $z \neq 0$:

$$w_k = r^{1/n}\,e^{\,i(\varphi+2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

- Geometrie: n Lösungen als regelmässiges n-Eck auf dem Kreis mit Radius $r^{1/n}$.

Beispiel

Bestimme alle Kubikwurzeln von $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i = 8e^{i\pi/4}$



$$z = 8e^{i\pi/4}, \quad w_k = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)},\ k = 0, 1, 2$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. Bestimme alle **Kubikwurzeln** von $3 - 3i$

2. Bestimme alle **vierten Wurzeln** von $4e^{i\pi/3}$

3. Löse $z^5 = -32$ in $\mathbb{C}$ und gib die **Winkelabstände** an

4. Finde die **Quadratwurzeln** von $5i$

3 Quadratische Gleichungen über $\mathbb{C}$

Intuition

- Für $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) gilt auch in $\mathbb{C}$ die bekannte Formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Die *Diskriminante* $D = b^2 - 4ac$ kann komplex sein. Falls D komplex ist, schreibe $D = re^{i\varphi}$. Dann gilt

$$\sqrt{D} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \quad \text{(zweite Wurzel nicht nötig)}$$

- **Merke (rein reelle Koeffizienten im Polynom):** Komplexe Lösungen treten immer als *komplex konjugierte Paare* auf.
- Alternativ geht auch *quadratisch ergänzen*; die Formel ist meist am schnellsten.

Beispielaufgabe

Löse in $\mathbb{C}$ und gib die Lösungen in Normalform $a + ib$ an:

$$x^2 + (3 - i)x + (2 - 2i) = 0$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Nutze die Mitternachtsformel; falls nötig $\sqrt{\cdot}$ *über Polarform. Ergebnisse als* $a + ib$.

1. $x^2 + x + 1 = 0$

2. $x^2 - 4x + 13 = 0$ (Kontrollfrage: treten konjugierte Paare auf?)

3. $x^2 + 2x + (1 + 2i) = 0$

4 Fundamentalsatz der Algebra & Polynomdivision

Intuition

- **Fundamentalsatz der Algebra (FFA):** Jedes Polynom p vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheiten) und lässt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben:
$$p(z) = a \prod_{j=1}^{n} (z - z_j).$$
- **Konjugiertenregel (bei Polynomen mit REIN reellen Koeffizienten):** Ist $a + bi$ eine Nullstelle, dann ist auch $a - bi$ eine Nullstelle.
- **Praktisches Vorgehen:**
  1. Eine Nullstelle finden/gegeben (z. B. z_0).
  2. Durch $(z - z_0)$ *dividieren* $\Rightarrow$ Grad sinkt.
  3. Wiederholen, bis ein quadratischer Rest bleibt, dann Mitternachtsformel.
- **Polynomdivision:** Wie schriftliche Division. Ergibt $p(z) = (z - z_0)q(z) + r$; bei Nullstelle z_0 ist der Rest $r = 0$.

Beispielaufgabe

Gegeben sei das Polynom
$$p(z) = z^3 - 4z^2 + 12z - 16$$
Bekannt: 2 ist Nullstelle. Zerlege p vollständig in Linearfaktoren.

Schwierigere Beispielaufgabe

Gegeben sei das Polynom

$$p(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4.$$

Bekannt: $1 + i$ ist Nullstelle. Zerlege p vollständig in Linearfaktoren.