Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 2

Komplexe Zahlen I

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 29.09.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Organisatorisches
2. Repetition
3. Begriffe & Rechenregeln
4. Eulersche Formel
5. Umwandlung zwischen Normal- und Polarform

1 Organisatorisches

Hinweis zur Kommunikation. Da die Kommunikation per E-Mail sehr umständlich ist (ich müsste jede Adresse einzeln ins Empfängerfeld setzen), verwende ich für Ankündigungen und kurze Rückfragen einen WhatsApp-Chat. Ich habe dafür eine Gruppe erstellt. Den Beitritt findet ihr über den QR-Code unten.

2 Repetition

Analysis A Serie 1, Aufgabe 3b

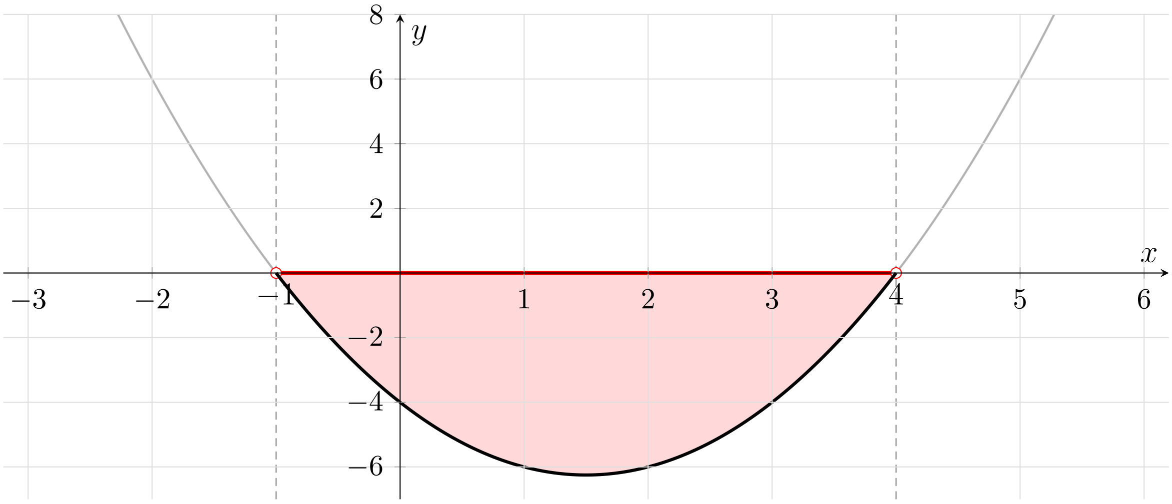
Bestimmen Sie Infimum und Supremum dieser Menge. Besitzt die Menge ein Minimum beziehungsweise ein Maximum?

$$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 < 0 \}$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (a \neq 0)$$

Lösung (zum Vorrechnen)



$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 < 0\} = (-1, 4)$

3 Begriffe & Rechenregeln (Komplexe Zahlen)

Grundbegriffe. Eine komplexe Zahl ist von der Form

$$z = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

$\mathrm{Re}(z) = a$ heisst *Realteil*, $\mathrm{Im}(z) = b$ *Imaginärteil*. Die *komplex Konjugierte* ist $\overline{z} = a - ib$ Der *Betrag* (Modul) ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

Rechenregeln. Für $z = a + ib$, $w = c + id$ gelten:

$$\begin{aligned}
z \pm w &= (a \pm c) + i(b \pm d), \\
zw &= (ac - bd) + i(ad + bc), \\
\overline{z \pm w} &= \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\tfrac{z}{w}\right)} = \tfrac{\overline{z}}{\overline{w}} \ (w \neq 0), \\
|zw| &= |z|\,|w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ (w \neq 0), \\
z = 0 &\iff |z| = 0
\end{aligned}$$

Division (Rezept). Für $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ (z \neq 0)$$

Beispielaufgaben

$(2-3i)-(1+4i) \qquad =$

$(2-3i)(1+4i) \qquad =$

$\dfrac{3-2i}{1+i} \qquad =$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. Bestimme $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), \overline{z}, |z|$ für $z=-1+3i$

2. Vereinfache $(1-2i)^2$ und $\dfrac{2+i}{1-3i}$ (in Normalform $a+ib$)

3. Zeige: $|z+\overline{z}| = 2|\operatorname{Re}(z)|$ und $|z-\overline{z}| = 2|\operatorname{Im}(z)|$

4. Beweise kurz: $|z|^2 = z\overline{z}$

5. Vereinfache $\dfrac{10+2i}{4i-2}$

4 Eulersche Formel

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Sofort folgt mit Real- und Imaginärteil:

$$\cos t = \operatorname{Re}\big(e^{it}\big), \qquad \sin t = \operatorname{Im}\big(e^{it}\big)$$

Rechenregeln

$$|e^{it}| = 1, \qquad \overline{e^{it}} = e^{-it}, \qquad e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Daraus entstehen die *Additionstheoreme*:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}, \qquad \boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Exponentialdarstellung trigonometrischer Funktionen. Aus $e^{it} = \cos t + i \sin t$ und $e^{-it} = \cos t - i \sin t$:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Beispiele

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad \text{(Euler-Identität: } e^{i\pi} + 1 = 0\text{)}$$
$$e^{i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Typische Stolpersteine.

- $\arg(z)$ ist nur bis auf $2\pi k$ eindeutig; Quadrant beachten (Vorzeichen von x, y).
- $e^{i\alpha} + e^{i\beta} \neq e^{i(\alpha+\beta)}$ (nur für Produkte gilt die Exponentialregel).
- Bei Division immer $r \neq 0$ und φ-Differenz korrekt wählen.

5 Polarform

Eine komplexe Zahl z kann man auch über **Betrag** und **Winkel** schreiben:

$$z = r\,e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z| \geq 0, \quad \varphi = \arg(z) \text{ (Winkel)}$$

Intuition: r ist die Entfernung vom Ursprung, φ ist der Drehwinkel (in Radiant). Vorteil: Produkte/Quotienten und Potenzen lassen sich sehr leicht rechnen:

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Hinweis: Der Winkel φ ist nur bis auf $2\pi k$ eindeutig; für $z = 0$ gibt es kein sinnvolles φ

Umrechnung Polarform ↔ Normalform

Polar → Normal	**Normal → Polar**
$z = x + iy$	$z = re^{i\varphi}$
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ falls $x > 0$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ falls $x < 0,\ y \geq 0$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ falls $x < 0,\ y < 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $x = 0,\ y > 0$, $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $x = 0,\ y < 0$.

Beispielaufgaben: Polar → Normal

1. $z_1 = 3\,e^{i\pi/6}$
2. $z_2 = 5\,e^{-i\,3\pi/4}$
3. $z_3 = 2\,e^{i\,5\pi/3}$

Beispielaufgaben: Normal → Polar

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$
2. $z_2 = -2 + 2\,i$
3. $z_3 = -3 - 3\sqrt{3}\,i$

MC – Polarform $z = re^{i\varphi}$

1. Sei $z = 3 - 3\sqrt{3}\,i$. Welche Polarform ist korrekt?

   (a) $z = 6\,e^{i\pi/3}$

   (b) $z = 6\,e^{-i2\pi/3}$

   (c) $z = 6\,e^{i5\pi/3}$

   (d) $z = 6\,e^{-i\pi/3}$

2. Für $z = re^{i\varphi}$ gilt stets:

   (a) $r = \mathrm{Re}(z)$

   (b) $r = |z|$

   (c) $\varphi = \mathrm{Im}(z)$

   (d) $\varphi = \arg(z) \in \mathbb{R}$ eindeutig

3. Sei $z = 2e^{i\pi/4}$ und $w = 3e^{-i\pi/6}$. Was ist zw?

   (a) $6e^{i\pi/12}$

   (b) $6e^{i5\pi/12}$

   (c) $5e^{i\pi/12}$

   (d) $6e^{i\pi/3}$

4. Für $z = re^{i\varphi} \neq 0$ ist $\dfrac{1}{z}$ gleich:

   (a) $\dfrac{1}{r}\,e^{i\varphi}$

   (b) $r\,e^{-i\varphi}$

   (c) $\dfrac{1}{r}\,e^{-i\varphi}$

   (d) $r\,e^{i\varphi}$

5. Wähle die korrekte Aussage.

   (a) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

   (b) $|re^{i\varphi}| = r$

   (c) $\overline{re^{i\varphi}} = re^{i\varphi}$

   (d) $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

6. Hauptargument: Für welches z ist $(z) = \pi$?

   (a) $z = -2 - 5i$

   (b) $z = -3$

   (c) $z = 3$

   (d) $z = 5i$

Formeln Polarform $z = r\, e^{i\varphi}$

Kehrwert: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\, e^{-i\varphi}$ Konjugierte: $\overline{z} = r\, e^{-i\varphi}$ Betrag: $|z|^2 = r^2$

Beispielaufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimme zwei reelle Zahlen x, y, so dass

$$(x + iy)^2 = a + ib$$