Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 1

Logik, Mengen & Zahlen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 22.09.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Organisatorisches
2. Aussagenlogik & Quantoren
3. Mengen & Intervalle
4. Schranken (Supremum & Infimum, Maximum & Minimum)
5. Definitionsmenge & Wertemenge
6. Vollständige Induktion

1 Organisatorisches

- Übungsstunde: Montag 8:00 - 9:45 HIL E7
- Serienabgabe: Freitag 18:00, Moodle
- Bei der abgegebene Serie, eine Aufgabe wo man besonders genaue Korrektur will mit einem Stern markieren
- Bei Fragen: E-Mail an vloganathan@student.ethz.ch
- Jahresprüfung im Sommer: Analysis A & B
- Hilfsmittel bei der Prüfung: 20 beschriftete A4-Seiten an Prüfung erlaubt & herkömmliche Formelsammlung
- Materialen: Siehe Link (oben)

2 Aussagenlogik & Quantoren

Aussagenlogik

Aussagen sind wahr/falsch. Quantoren: $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt mindestens ein), $\exists!$ (genau ein), $\nexists$ (kein). Operatoren: $\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$. Negationen der Quantoren:

$$\neg(\forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x), \qquad \neg(\exists x\, A(x)) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x).$$

Wichtig: Quantorenreihenfolge ist nicht vertauschbar (z. B. $\forall x\, \exists y :\ x < y$ wahr, $\exists y\, \forall x :\ x < y$ falsch).

Übungsaufgaben

1. **Wahr/Falsch** (kurz begründen):
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} :\ x < y$
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} :\ x < y$
2. **Formalisieren**:
   (a) ($\mathbb{R}$) Es gibt *keine* Zahl, deren Quadrat negativ ist.
   (b) ($\mathbb{Z}$) Jede ganze Zahl hat einen Nachfolger.
   (c) ($\mathbb{R}$) Es existiert genau ein x mit $x^2 = 1$ und $x > 0$.

3 Mengen & Intervalle

Mengen und Intervalle

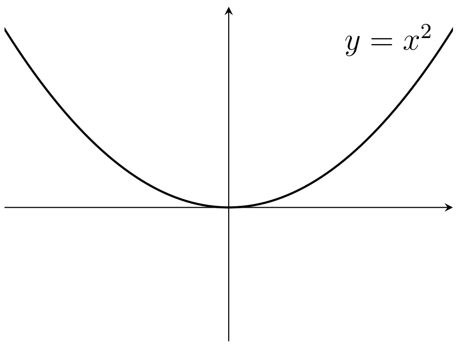
Elementschreibweise: $x \in M$, leere Menge $\emptyset$, Teilmenge $A \subseteq B$. Intervalle: $(a, b),\ [a, b],\ [a, b),\ (a, b]$, ausserdem $(-\infty, b],\ [a, \infty)$. Zahlmengen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

4 Schranken

- **Obere Schranke (Deckel):** Eine Zahl O, so dass *alle* Werte der Menge/Funktion *darunter oder genau darauf* liegen. (Horizontale Linie $y = O$, der gesamte Graph liegt darunter.)
- **Untere Schranke (Boden):** Eine Zahl U, so dass *alle* Werte *darüber oder genau darauf* liegen. (Horizontale Linie $y = U$, der gesamte Graph liegt darüber.)
- **Beschränktheit:** „Oben beschränkt“ $\Rightarrow$ es gibt wenigstens einen Deckel. „Unten beschränkt“ $\Rightarrow$ es gibt wenigstens einen Boden.

Bildsprache zum Mitnehmen: Deckel/Boden sind horizontale Linien, die die Werte „einsperren“.
Der *engste* Deckel/Boden ist das, was wir **Supremum**/**Infimum** nennen; wenn der Graph ihn berührt, heißt er zusätzlich **Maximum**/**Minimum**.

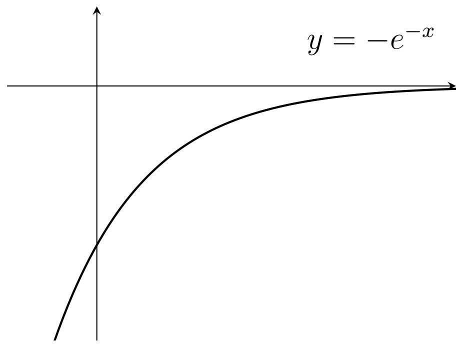
Beispiele



Werteintervall:

Beschränktheit:

Schranken:

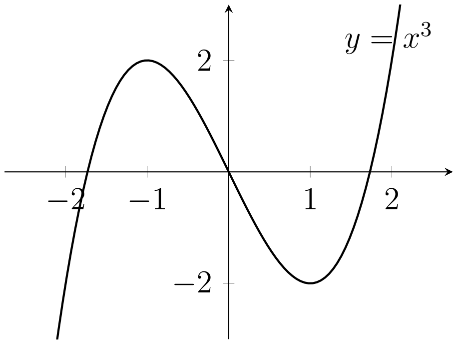


Werteintervall:

Beschränktheit:

Schranken:

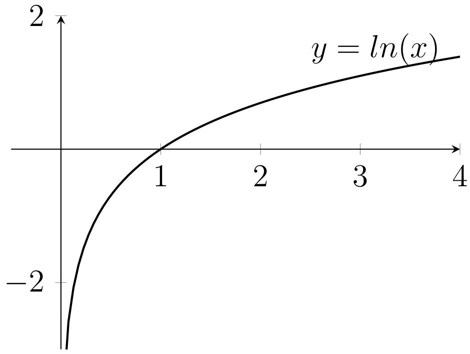
Übungsaufgaben



Werteintervall:

Beschränktheit:

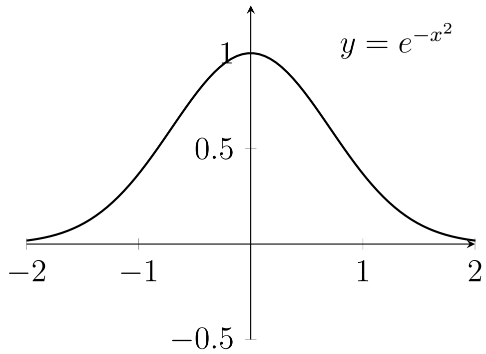
Schranken:



Werteintervall:

Beschränktheit:

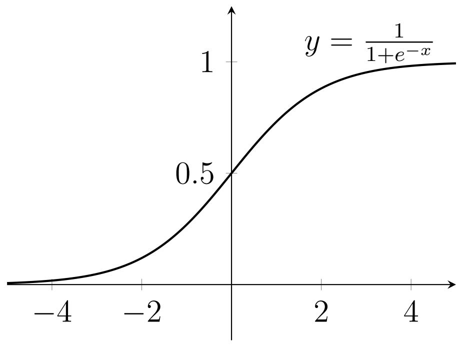
Schranken:



Werteintervall:

Beschränktheit:

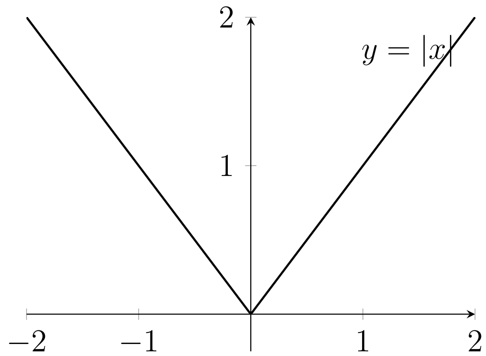
Schranken:



Werteintervall:

Beschränktheit:

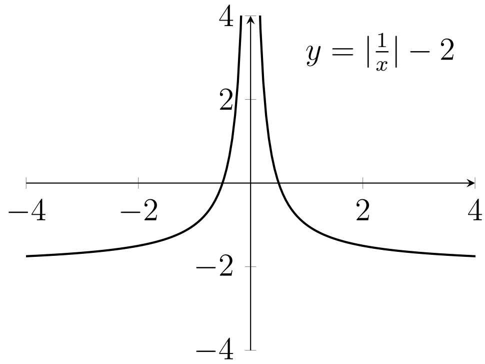
Schranken:



Werteintervall:

Beschränktheit:

Schranken:



Werteintervall:

Beschränktheit:

Schranken:

5 Definitionsmenge & Wertemenge

Definitionsmenge

(Domain): Welche x-Werte *darf* ich in die Funktionsvorschrift einsetzen? Denk an „Verbotsschilder“:

- **Nenner** darf nie 0 sein (z. B. $\frac{1}{x-2}$: $x \neq 2$).
- **Gerade Wurzel**: Ausdruck unter der Wurzel ≥ 0 (z. B. $\sqrt{x-1}$: $x \geq 1$).
- **Logarithmus**: Argument > 0 (z. B. $\ln(x+3)$: $x > -3$).
- **Verkettung**: Erst die innere, dann die äussere Bedingung prüfen.

Wertemenge

(Range): Alle y-Werte, die die Funktion *annehmen kann.* Am Graphen sind das alle „Höhen“, die der Graph erreicht. Man findet sie oft über

- grobes Skizzieren/Denken in Grenzwerten ($x \to \pm\infty$),
- Monotonie/Symmetrien,
- oder per Umformen nach x (falls machbar).

Übungsaufgaben — nur Definitionsmenge

$f(x) = x^2$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad D =$

$h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad D =$

$p(x) = \ln(x+3)$ $\qquad D =$

$r(x) = e^{-x}$ $\qquad D =$

$s(x) = |x-2|$ $\qquad D =$

$t(x) = \sqrt{4-x^2}$ $\qquad D =$

$u(x) = \sqrt{x^2-4}$ $\qquad D =$

$v(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ $\qquad D =$

$w(x) = \ln|x|$ $\qquad D =$

$a(x) = \tan x$ $\qquad D =$

$b(x) = \arcsin x$ $\qquad D =$

$c(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad D =$

$d(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ $\qquad D =$

$e(x) = \sqrt{\ln(x)}$ $\qquad D =$

6 Vollständige Induktion

Beispielaufgabe

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; 1 + 2 + \cdots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung (zum Vorrechnen)