# Mathematik I: Analysis A

## Übungsstunde 12

*Integration III & Gewöhnliche DGL's 1. Ordnung*

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 08.12.2025

*Material:* visva-loganathan.ch

# Überblick dieser Übungsstunde

1. Integrationstrick: Trigonometrische Identitäten
2. Integrationstrick: Bruchfunktionen
3. Klassifikation gewöhnliche DGL's
4. Gewöhnliche DGL's 1. Ordnung (homogen & inhomogen)

# 1 Integrationstrick: Identitäten & Rechenregeln

## Trigonometrische Identitäten verwenden

Bei Integralen mit trigonometrischen Funktionen lohnt es sich oft, *zuerst* vor dem integrieren passende Identitäten zu benutzen. Damit kann man viele Produkte oder Quadrate vereinfachen und das Integral deutlich leichter berechnen.

**Die wichtigsten nützlichen trigonometrischen Relationen**

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)\,\cos(x) = \tfrac{1}{2}\sin(2x) \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

**Produkt-zu-Summen-Formeln**

$$\sin(ax)\,\sin(bx) = \frac{1}{2}\big[\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\big]$$

$$\sin(ax)\,\cos(bx) = \frac{1}{2}\big[\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)\big]$$

$$\cos(ax)\,\cos(bx) = \frac{1}{2}\big[\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)\big]$$

## Beispielaufgabe

Bestimme die Stammfunktion F(x) von:

$$F(x) = \int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$F(x) = \int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$= \int \left(\sin(x)\cos(x)\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(2\cdot 2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1-\cos(4x)\,dx$$

$$F(x) = \frac{1}{8}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + C$$

## 2 Integrationstrick: Bruchfunktionen

### Quotient aus Ableitung und Funktion

Bei vielen Bruchfunktionen erkennt man den Zähler als Ableitung des Nenners. Dann lässt sich das Integral sehr schnell mithilfe einer Logarithmus-Stammfunktion berechnen.

**Wichtige Formel (logarithmische Ableitung)** Sei $v(x)$ eine differenzierbare Funktion (mit $v(x) \neq 0$). Dann gilt

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}\,dx = \ln|v(x)| + C$$

(Begründung: Substitution $u = v(x)$, $du = v'(x)\,dx$)

### Beispielaufgabe

Oft liegt ein Integral nicht sofort in der Form $\frac{v'(x)}{v(x)}$ vor. Mit einer geschickten Umformung kann man den Ausdruck jedoch so „zurechtbiegen“, dass die logarithmische Ableitungsregel anwendbar wird. Ein klassisches Beispiel ist:

$$F(x) = \int \tan(x)\,dx$$

$$F(x) = \int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$v(x) = \cos(x)$
$v'(x) = -\sin(x)$

$$= -1 \cdot \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -1 \cdot \ln|\cos(x)| + C$$

$$\underline{\underline{F(x) = C - \ln|\cos(x)|}}$$

**Weitere Übungsaufgaben (für die Studierenden)**

In allen folgenden Aufgaben kann durch geeignete Umformung die Regel $\int \frac{v'(x)}{v(x)}\,dx = \ln|v(x)| + C$ verwendet werden. Bestimme folgende Stammfunktionen:

1. $F_1(x) = \int \frac{2x+1}{2x^2+2x}\,dx$ $= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

$v(x) = 2x^2 + 2x$ | $v(x) = x^2 + x$

$v'(x) = 4x + 2$ | $v'(x) = 2x + 1$

$F_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{2}(2x+1)}{\cancel{2}(x^2+x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x| + C$

$\frac{1}{2}\ln|2(x^2+x)| + C$

$\frac{1}{2}\ln|2| + \ln|(x^2+x)| + C$

$\frac{1}{2}\ln|(x^2+x)| + C$

2. $F_2(x) = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$ $v = 1-x^2$, $v' = -2x$

$F_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$

$F_2(x) = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\,dx$

3. $F_3(x) = \int \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}\,dx$, *Tipp: Verwende die Definition des Tangens Hyperbolicus*

$F(x) = \int \tanh(3x)\,dx = \int \frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x)}\,dx$

$\left.\begin{array}{l} v = \cosh(3x) \\ v' = 3\sinh(3x) \end{array}\right\} \rightarrow F_3(x) = \frac{1}{3}\int \frac{3\sinh(3x)}{\cosh(3x)}\,dx$

$F_3(x) = \frac{1}{3}\ln|\cosh(3x)| + C$

4. **Schwierigere Aufgabe**

$F_4(x) = \int \frac{1}{\tan(x)\,\ln|\sin(x)|}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\tan(x)}}{\ln|\sin(x)|}\,dx = \int \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\ln|\sin(x)|}\,dx = \int \frac{\cot(x)}{\ln|\sin(x)|}\,dx$

$v = \ln|\sin(x)|$

$f(x) = \ln|\sin(x)|$ $\Big\}$ Kettenregel: $u = \ln|x|$, $u' = \frac{1}{x}$ | $v = \sin(x)$, $v' = \cos(x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$

$F(x) = \int \frac{\cot(x)}{\ln|\sin(x)|}\,dx$

$\left.\begin{array}{l} v = \ln|\sin(x)| \\ v' = \cot(x) \end{array}\right\} \int \frac{v'}{v}\,dx$ erfüllt ✓

$F(x) = \ln|\ln|\sin(x)|| + C$

# 3 Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine *unbekannte Funktion* und deren *Ableitungen* vorkommen. Die Funktion selbst ist also noch nicht bekannt, sondern soll mithilfe geeigneter Methoden aus der Differentialgleichung bestimmt werden. Man unterscheidet grob zwischen

- **gewöhnlichen Differentialgleichungen** (engl. ordinary differential equations, ODEs),
- **partiellen Differentialgleichungen** (engl. partial differential equations, PDEs).

Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODEs) beschreiben Funktionen, die nur von *einer* Variablen abhängen (z. B. $y = y(x)$). Partielle Differentialgleichungen (PDEs) beschreiben Funktionen, die von *mehreren* Variablen abhängen (z. B. $u = u(x, t)$) und enthalten partielle Ableitungen.
In **Analysis A und B** betrachten wir ausschliesslich ODEs. PDEs spielen in diesem Kurs keine Rolle und können hier vollständig ignoriert werden. Wenn im Folgenden von „Differentialgleichungen" die Rede ist, sind immer *gewöhnliche Differentialgleichungen* gemeint.

## Ordnung

ODEs lassen sich weiter klassifizieren. Ein erstes, sehr wichtiges Kriterium ist die *Ordnung* der Differentialgleichung:

- Eine **DGL erster Ordnung** enthält die gesuchte Funktion, eventuell sogenannte Störterme (z. B. bekannte Funktionen von $x$), und *nur die erste Ableitung* $y'(x)$, aber keine höheren Ableitungen.
- Eine **DGL höherer Ordnung** enthält zusätzlich auch höhere Ableitungen wie $y''(x)$, $y^{(3)}(x)$ usw.

## Linearität

Eine gewöhnliche Differentialgleichung $n$-ter Ordnung heisst *linear*, wenn sie in der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = g(x)$$

geschrieben werden kann. Dabei sind $a_0, \ldots, a_{n-1}$ und $g$ gegebene Funktionen von $x$.

Wichtig ist:

- $y, y', \ldots, y^{(n)}$ kommen nur in **erster Potenz** vor,
- Ableitungen von $y$ werden **nicht miteinander multipliziert**,
- es treten keine Ausdrücke wie $y^2$, $\sqrt{y}$, $\sin(y)$ usw. auf.

In dieser Vorlesung:

- Bei **DGL erster Ordnung** spielt Linearität keine grosse Rolle, da wir alle vorkommenden Gleichungen mit Separation der Variablen (allenfalls nach Homogenisierung oder Substitution) behandeln können.
- Bei **DGL höherer Ordnung** betrachten wir nur lineare Gleichungen. Diese lösen wir mit dem Euler-Ansatz und dem charakteristischen Polynom.

## Homogenität

Ein weiteres wichtiges Klassifikationskriterium ist die *Homogenität*.
Eine lineare DGL $n$-ter Ordnung hat allgemein die Form

$$a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = g(x),$$

wobei die $a_k(x)$ gegebene Funktionen sind und $g(x)$ die sogenannte *Inhomogenität* oder *Störfunktion*ist.

- Ist $g(x) = 0$, so heisst die Gleichung **homogen**.
- Ist $g(x) \neq 0$, so heisst die Gleichung **inhomogen**.

Beispiele:

$$y'' + xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{homogen}, \qquad y'' + y = \underbrace{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \text{inhomogen}.$$

x-Terme als Faktor verletzen Homogenität nicht!

x-Terme als Summe machen INhomogen!

## Übung: Klassifikation von Differentialgleichungen

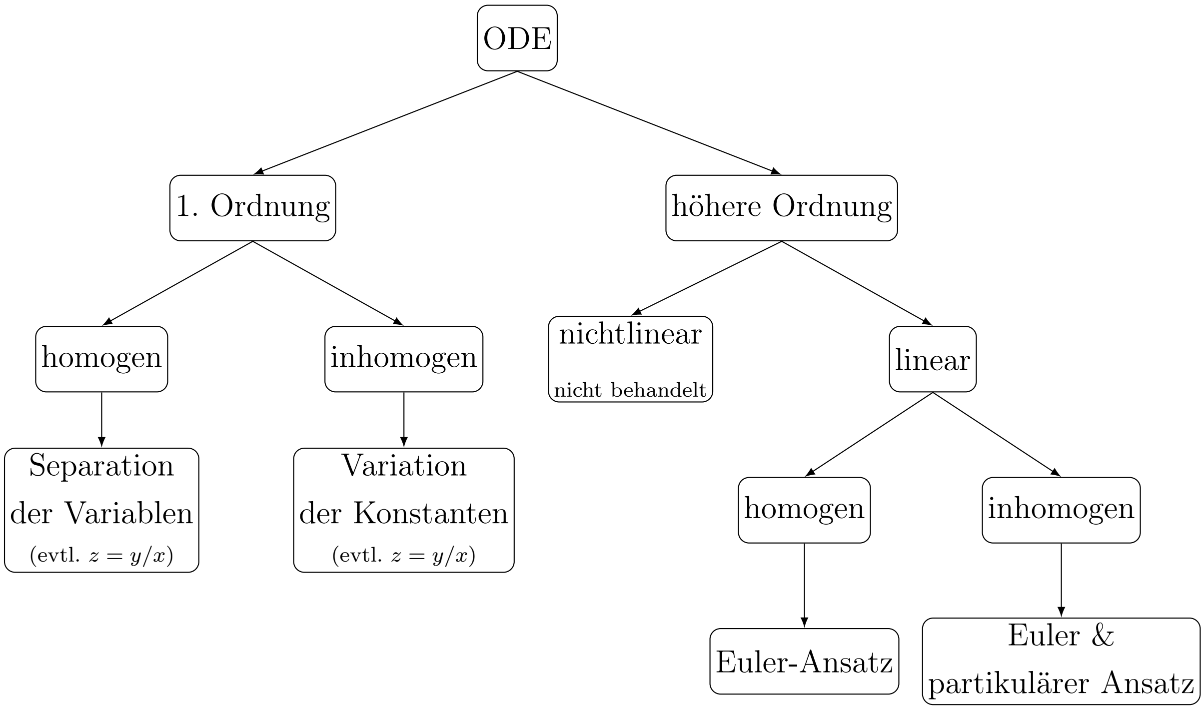
Klassifiziere die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen. Trage für jede DGL

- die **Ordnung** (z. B. 1, 2, 3, . . . ),
- die **Linearität** (bei ODE's höherer Ordnung: linear / nichtlinear)
- die **Homogenität** (homogen / inhomogen)

in die vorgesehenen Felder ein.

| DGL | Ordnung | Linearität | Homogenität |
|---|---|---|---|
| $y' + 3y = 0$ | 1. | lin. | hom. |
| $y' = 2x$ | 1. | lin. | INhom. |
| $y' = x\,y^2$ | 1. | NICHTl. | hom. |
| $y'' + y = 0$ | 2. | lin. | hom. |
| $y''' - 3y' + 2y = e^x$ | 3. | lin. | INhom. |
| $y'' = (y')^2$ | 2. | NichtL. | hom. |

## Lösungsverfahren anhand Typ der ODE




Der obige Baum zeigt, wie wir gewöhnliche Differentialgleichungen (ODEs) einteilen. Anhand dieser Einteilung können wir jeweils ablesen, mit welchem Verfahren eine gegebene ODE in dieser Vorlesung gelöst wird (zum Beispiel Separation der Variablen, Variation der Konstanten oder Euler-Ansatz mit partikulärem Ansatz).

In dieser Übungsstunde betrachten wir jedoch nur ODEs **erster Ordnung** und üben die zugehörigen Methoden.

# 4 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLs) erster Ordnung sind Gleichungen der Form

$$y'(x) = F(x, y),$$

in denen die gesuchte Funktion $y(x)$ nur durch ihre erste Ableitung und eventuell durch auftretende Funktionen von $x$ und $y$ vorkommt.

## Allgemeine & spezielle Lösungen: Wiederholung der Integration

Aus der Integration kennt man bereits das Phänomen der *Integrationskonstante*: Löst man etwa $F'(x) = f(x)$, so erhält man die allgemeine Stammfunktion

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Erst eine Zusatzbedingung wie $F(x_0) = F_0$ bestimmt den Wert der Konstante eindeutig und liefert eine *spezielle Lösung*.
Ganz analog verhält es sich bei DGLs erster Ordnung: Die allgemeine Lösung enthält eine Integrationskonstante $C$. Eine Anfangs- oder Nebenbedingung (z. B. $y(x_0) = y_0$) legt diese Konstante fest und bestimmt so die spezielle Lösung.

**Beispielaufgabe: Spezielle Lösung** Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung und verwende anschliessend die Nebenbedingung, um die spezielle Lösung zu bestimmen:

$$y'(x) = 2x \qquad \text{und} \qquad y(2) = 5$$

$y' = 2x$

$y'$ umschreiben als $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 2x \quad /\cdot dx$

$1 \cdot dy = 2x \cdot dx \quad /\int$

$\int (1)\,dy = \int (2x)\,dx$

$y + C_1 = x^2 + C_2 \quad /-C_1$

$y = x^2 + \underbrace{C_2 - C_1}$

Differenz zweier Konstanten ist wieder eine Konstante

zum Schreibarbeit verringern definieren wir einfach eine neue Konstante $C = C_2 - C_1$

$y = x^2 + C$

Allgemeine Lösung: $y_{allg}(x) = x^2 + C \qquad C \in \mathbb{R}$

Nebenbedingung

$y(2) = 5$

$2^2 + C = 5$

$4 + C = 5 \quad /-4$

$C = 1$

Spezielle Lösung

$y_{spez}(x) = x^2 + 1$

Dieses Beispiel zeigt: *Eine DGL 1. Ordnung zu lösen bedeutet oft nichts anderes, als wie gewohnt zu integrieren und danach eine Anfangsbedingung einzusetzen.* Die Methode der Separation der Variablen verallgemeinert genau dieses Vorgehen.

## Separation der Variablen

Viele in dieser Vorlesung vorkommenden DGLs erster Ordnung lassen sich mit *Separation der Variablen* lösen. Eine Differentialgleichung heisst *separierbar*, wenn sie sich (allenfalls nach geeignetem Umformen oder einer Substitution) in die Form

$$A(y)\,dy = B(x)\,dx$$

bringen lässt.
In diesem Fall können wir die Variablen trennen und beide Seiten integrieren:

$$\int A(y)\,dy = \int B(x)\,dx + C$$

Eine häufige, aber nicht die einzige Form einer separierbaren Gleichung ist

$$y'(x) = f(x)\,g(y)$$

Typische Beispiele separierbarer Gleichungen:

- Homogene DGL erster Ordnung,
- Gleichungen, die nach einer Substitution wie $z = z(y)$ oder $z = x/y$ in eine separierbare Form gebracht werden können.

Separation der Variablen liefert stets die allgemeine Lösung der homogenen (separierbaren) Gleichung.
Viele DGLs erster Ordnung sind jedoch *inhomogen*. Diese homogenisieren wir zuerst und lösen die homogene Gleichung per Separation der Variablen. Die vollständige Lösung erhalten wir danach mit der *Variation der Konstanten*.

## Beispielaufgabe

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = -k\,y(x), \qquad y(0) = N_0,$$

wobei $k > 0$ und $N_0$ Konstanten sind.

1. Löse die Differentialgleichung mittels *Separation der Variablen.*
2. Bestimme die allgemeine Lösung $y(x)$.
3. Bestimme diejenige Lösung (spezielle Lösung), welche den Anfangswert $y(0) = N_0$ erfüllt.

*Hinweis:* Diese Gleichung beschreibt z. B. Zerfalls- oder Abnahmeprozesse, kommt jedoch hier nur als reines mathematisches Beispiel vor.

$$\frac{dy}{dx} = -ky \quad / \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -k \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{y}dy = -k\,dx \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -k\int 1\,dx$$

$$\ln|y| + A_1 = -kx + A_2 \quad / -A_1$$

$$\ln|y| = -kx + \underbrace{A_2 - A_1}_{\text{Konstanten}} \quad / \text{ Definiere } B = A_2 - A_1$$

$$\ln|y| = -kx + B \quad / e^{1}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-kx+B} \quad / \text{ Exponenten-regeln}$$

$$y = \underbrace{e^{B}}_{} \cdot e^{-kx}$$

Wieder eine Konstante Zahl! Zum Schreibarbeit reduzieren: $C = e^{B}$

$$\underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{-kx}}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Spezielle Lösung } Einfach Nebenbedingung einsetzen!

$$y(0) = N_0$$

$$C \cdot e^{-k\cdot 0} = N_0$$

$$C \cdot e^{0} = N_0$$

$$C \cdot 1 = N_0$$

$$\underline{\underline{C = N_0}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{y_{spez}(x) = N_0 \cdot e^{-kx}}}$$

## Übungsaufgaben: Separation der Variablen

Löse jede der folgenden gewöhnlichen DGLs (bzw. Anfangswertprobleme) mit *Separation der Variablen*. Gib jeweils die allgemeine Lösung an; falls ein Anfangswert gegeben ist, bestimme zusätzlich die spezielle Lösung.

1. $y' = x\,y \qquad y(2) = e$

$\frac{dy}{dx} = xy \quad / \cdot \frac{1}{y} \; / \cdot dx \; / \int$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$

$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad / e^1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$

$y = \underbrace{e^C}_{C} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y(2) = e$

$C \cdot e^{\frac{1}{2}(2)^2} = e$

$C \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} = e$

$C \cdot e^2 = e \quad / : e^2$

$C = \frac{1}{e}$

$y(x) = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y(x) = e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$

Egal ob Konstante im Exponent steht oder als Faktor steht!

2. $y' = \frac{1}{x}\,y, \qquad x > 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,y \quad / \cdot \frac{1}{y} \; / \cdot dx \; / \int$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln|y| = \ln|x| + C \quad / e^1$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + C}$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + C}$

$y = \underbrace{e^C}_{C} \cdot e^{\ln|x|}$

$y = C \cdot e^{\ln|x|}$

$y(x) = Cx$

3. $y' = \frac{x}{\cos(y)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\cos(y)} \quad / \cdot \cos(y) \; / \cdot dx \; / \int$

$\int \cos(y)\,dy = \int x\,dx$

$\sin(y) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad / \arcsin$

$\arcsin(\sin(y)) = \arcsin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$

$y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$

4. $y' = x\,y^2, \qquad y(0) = 2$

$\frac{dy}{dx} = xy^2 \quad / \cdot \frac{1}{y^2} \; / \cdot dx \; / \int$

$\int y^{-2}\,dy = \int x\,dx$

$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad / \cdot (-1)$

$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 \underbrace{- C}$

$-C$ als positiv definieren (Vorzeichen $+$)

$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$\frac{1}{y} = C - \frac{1}{2}x^2 \quad / ()^{-1}$

$y(x) = \frac{1}{C - \frac{x^2}{2}}$

$y(0) = 2$

$\frac{1}{C - \frac{0^2}{2}} = 2$

$\frac{1}{C} = 2$

$\frac{1}{C} = 2 \quad / ()^{-1}$

$C = \frac{1}{2}$

$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}$

$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}(1 - x^2)}$

$y(x) = \frac{2}{1 - x^2}$

## Variation der Konstanten

Bei einer *inhomogenen* DGL erster Ordnung besteht der Lösungsweg in zwei Schritten: zuerst bestimmen wir die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, danach bauen wir den Störterm der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten in die Lösung ein.

**1. Schritt: Homogenisieren und homogene Lösung bestimmen**
Gegeben sei eine inhomogene DGL erster Ordnung

$$y'(x) = F(x, y)$$

Um die homogene Gleichung zu erhalten, entfernen wir den inhomogenen Term (Störterm). Die homogene Gleichung lösen wir mit Separation der Variablen und erhalten die allgemeine Lösung der folgenden Form wobei $C$ die Integrationskonstante ist:

$$y_{\text{hom}}(x) = \Phi(x, C)$$

**2. Schritt: Variation der Konstanten**
Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, erlauben wir der Integrationskonstante $C$ der homogenen Lösung abhängig von $x$ zu werden. Wir ersetzen also $C$ durch eine Funktion $K(x)$ und betrachten den Ansatz

$$C \implies K(x)$$

$$y_{\text{part}}(x) = \Phi(x, K(x))$$

Wir leiten $y_{\text{part}}(x)$ nach $x$ ab und setzen sowohl $y_{\text{part}}(x)$ als auch $y'_{\text{part}}(x)$ in die inhomogene Gleichung ein. Dabei verschwinden alle Terme, die $K(x)$ enthalten, und es bleibt eine Gleichung übrig, die nur bekannte Terme von $x$ sowie den Ausdruck $K'(x)$ enthält. Diese Gleichung lässt sich nach $K'(x)$ auflösen und integrieren:

$$K(x) = \int K'(x)\, dx + C, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ (Konstante)}$$

**3. Schritt: Einsetzen und allgemeine Lösung**
Setzen wir die gefundene Funktion $K(x)$ in den Ansatz $y_{\text{part}}(x)$ ein, erhalten wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_{\text{part}}(x) = \Phi(x)$$

Diese enthält nur bekannte Ausdrücke in $x$ und Konstanten, aber keine unbekannten Funktionen mehr. Eine Anfangs- oder Nebenbedingung bestimmt schliesslich die verbleibende (Integrations)-Konstante $C$ der Lösung.

## Beispielaufgabe: Variation der Konstanten

Löse das Anfangswertproblem

$$y'(x) = e^x - 3y(x), \qquad y(0) = 1$$

Bestimme die Lösung mittels *Variation der Konstanten.*

$$y' = e^x - 3y \quad /+3y$$

$$y' + 3y = e^x$$

Homogenisieren

$$y' + 3y = 0 \quad /-3y$$

$$\frac{dy}{dx} = -3y \quad /\cdot \frac{1}{y} \;/\cdot dx \;/\int$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -3\,dx$$

$$\ln|y| = -3x + C \quad /e^{1}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-3x+C}$$

$$y = e^{C} \cdot e^{-3x}$$

$$y_{hom}(x) = C \cdot e^{-3x}$$

$$C \longrightarrow K(x)$$

$$y_{part}(x) = K(x) \cdot e^{-3x}$$

Ableiten (Produktregel) $\left\{ \begin{array}{l|l} u = K(x) & v = e^{-3x} \\ u' = K'(x) & v' = -3e^{-3x} \end{array} \right.$

$$y_{part}'(x) = e^{-3x} K'(x) - 3e^{-3x} K(x)$$

In Inhomogene DGL einsetzen

$$y' + 3y = e^x$$

$$e^{-3x} K'(x) - 3e^{-3x} K(x) + 3 \cdot K(x) e^{-3x} = e^x$$

$$e^{-3x} K'(x) = e^x$$

$$e^{-3x} K'(x) = e^x \quad / \cdot e^{3x}$$

$$K'(x) = e^{4x} \quad / \int dx$$

$$\int K'(x)\,dx = \int e^{4x}\,dx$$

$$K(x) = \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

$$y_{part}(x) = K(x) \cdot e^{-3x}$$

$$= \left(\frac{1}{4} e^{4x} + C\right) \cdot e^{-3x}$$

$$y_{part}(x) = \frac{1}{4} e^{x} + C \cdot e^{-3x} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Anfangsbed. $y(0) = 1$

$$y(0) = 1$$

$$\frac{1}{4} e^{0} + C \cdot e^{-3\cdot 0} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + C \cdot 1 = 1 \quad / -\frac{1}{4}$$

$$C = \frac{3}{4}$$

$$y_{part}(x) = \frac{1}{4} e^{x} + \frac{3}{4} e^{-3x}$$