Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 11

Integration II

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 01.12.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Partielle Integration: Tabellenmethode
2. Integration mit Partialbruchzerlegung
3. Anwendung von Symmetrien

1 Partielle Integration: Tabellenmethode (Schnelltrick)

Wenn wir ein Produkt aus einem Polynom und einer Funktion haben, die sich „periodisch“ integriert (z. B. $\sin x$, $\cos x$, e^x), kann man die partielle Integration mit einer Tabelle besonders schnell ausführen.

Beispielaufgabe: $F(x) = \int x^3 \sin(x)\, dx$

1. In die Spalte D schreiben wir die Ableitungen des Polynoms, bis wir bei 0 ankommen.
2. In die Spalte I schreiben wir die wiederholten Integrale von $\sin x$.
3. Links notieren wir ein abwechselndes Vorzeichen: $+ - + - \ldots$
4. Dann verbinden wir diagonal und addieren die Produkte.

Vorz.	D	I
$+$	x^3	$\sin(x)$
$-$	$3x^2$	$-\cos(x)$
$+$	$6x$	$-\sin(x)$
$-$	6	$\cos(x)$
$+$	0	$\sin(x)$

$$+ x^3 \cdot (-\cos(x))$$
$$- 3x^2 \cdot (-\sin(x))$$
$$+ 6x \cdot (\cos(x))$$
$$- 6 \cdot (\sin(x)) \quad + \underbrace{\int 0 \cdot \sin(x)\, dx}_{\text{"} \int 0\, dx \text{"} = C}$$

$$F(x) = -x^3 \cos(x) + 3x^2 \sin(x) + 6x \cos(x) - 6 \sin(x) + C$$
$$F(x) = (3x^2 - 6)\sin(x) + (-x^3 + 6x)\cos(x) + C$$

Merke: Die Tabellenmethode ist nur ein anderer (schnellerer) Weg, die partielle Integration mehrfach anzuwenden. Sie funktioniert besonders gut, wenn

- ein Faktor eines Polynoms ist (wird durch Ableiten immer einfacher).
- der andere Faktor sich „einfach“ integrieren lässt (e^x, $\sin x$, $\cos x$)

Übungsaufgaben zur partiellen Integration (Tabellenmethode)

1. Bestimme eine Stammfunktion von $\int x^3 e^x \, dx$

Vorz.	D	I
$+$	x^3	e^x
$-$	$3x^2$	e^x
$+$	$6x$	e^x
$-$	6	e^x
$+$	0	e^x

$+x^3$

$-3x^2$

$+6x$

$-6 \qquad + \underbrace{\text{"}\int 0 \cdot e^x dx\text{"}}_{C}$

$$\underline{F(x) = e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C}$$

$\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin \qquad (\;)'$

2. Bestimme eine Stammfunktion von $\int e^x \cos(x) \, dx$

Vorz.	D	I
$+$	$\cos(x)$	e^x
$-$	$-\sin(x)$	e^x
$+$	$-\cos(x)$	e^x

$+\cos(x)e^x$

$-(-\sin(x))e^x \quad + \underbrace{\int -\cos(x)\, e^x dx}_{-\int \cos(x)\, e^x dx}$

$$F(x) = \int e^x \cos(x) dx = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \cos(x) e^x dx \quad \Big| + \int e^x \cos(x) dx$$

$$2\int e^x \cos(x) dx = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \quad /:2$$

$$\underline{F(x) = \int e^x \cos(x) dx = \tfrac{1}{2} e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)) + C}$$

2 Integration mit Partialbruchzerlegung

Viele Integrale mit gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wobei P, Q Polynome sind, kann man mit der **Partialbruchzerlegung** lösen. Idee: Wir schreiben den Bruch als Summe von „einfacheren" Brüchen, deren Stammfunktionen wir kennen (meistens $\ln|x - a|$).

Grundidee (einfacher Fall)

Wir betrachten Ausdrücke der Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit} \quad \deg P < \deg Q$$

wobei sich der Nenner in *verschiedene Linearfaktoren* zerlegen lässt:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

Dann machen wir den Ansatz

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

bestimmen die Konstanten A_i und integrieren danach jeden Term einzeln:

$$\int \frac{A_i}{x - a_i}\, dx = A_i \ln|x - a_i| + C$$

Allgemeines Vorgehen:

1. Falls $\deg P \geq \deg Q$: führe eine *Polynomdivision* durch, bis $\deg P < \deg Q$ gilt.
2. Faktorisiere den Nenner $Q(x)$ vollständig in Linearfaktoren.
   - Hat $Q(x)$ nur *einfache* Nullstellen, so erhältst du Faktoren der Form $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$.
   - Tritt eine Nullstelle a mit Vielfachheit k auf, so erscheint der entsprechende Faktor als $(x-a)^k$ im Nenner. Für diesen Faktor brauchst du später im Ansatz einen Term
   $$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k}.$$
3. Mache einen Ansatz mit unbekannten Konstanten $A, B, C, \ldots$
4. Bestimme die Konstanten durch Einsetzen günstiger x-Werte oder Koeffizientenvergleich.
5. Integriere die einfachen Brüche termweise.

Beispielaufgabe

Bestimmen eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

(Hinweis: Faktorisiere zunächst den Nenner.)

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x\cdot(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{A(x+1)}{x\ (x+1)} + \frac{B\cdot x}{(x+1)\cdot x} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} = \frac{x^1(A+B) + A}{x(x+1)}$$

x^0: $A = 1$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{A = 1}}$

x^1: $A + B = 2$

$1 + B = 2 \quad /-1$

$\underline{\underline{B = 1}}$

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$F(x) = \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}$$

$$F(x) = \ln|x| + \ln|x+1| + C$$

$$\underline{\underline{F(x) = \ln|x(x+1)| + C}}$$

$C \in \mathbb{R}$

Beispielaufgabe (für die Studierenden)

Bestimmen eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+2x^2}$$

(Hinweis: Beachte das ein Faktor im Nenner doppelt vorkommt und wende die Regel für mehrfache gleiche Faktoren an)

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+2x^2} = \frac{x+1}{x^2(x+2)} = \frac{x+1}{\underbrace{x \cdot x}_{} \cdot (x+2)}$$

x als Faktor kommt doppelt vor

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} \quad \Big\} \quad \frac{Ax(x+2)}{x \cdot x(x+2)} + \frac{B(x+2)}{x^2(x+2)} + \frac{Cx^2}{(x+2)x^2}$$

$$f(x) = \frac{Ax^2 + 2Ax + Bx + 2B + Cx^2}{x^2(x+2)}$$

$$f(x) = \frac{x^2(A+C) + x^1(2A+B) + 2B}{x^2(x+2)} = \frac{0x^2 + 1x + 1}{x^3 + 2x^2}$$

x^2: $A + C = 0 \longrightarrow C = -A$

x^1: $2A + B = 1$

x^0: $2B = 1 \longrightarrow B = \frac{1}{2} \longrightarrow 2A + \frac{1}{2} = 1 \longrightarrow 2A = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$

$$F(x) = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(\ln|x| - \ln|x+2|\right) - \frac{1}{2x} + C$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| - \frac{1}{2x} + C}$$

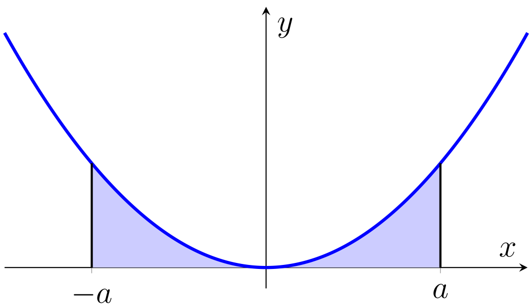
3 Symmetrien ausnutzen

Symmetrien von Funktionen kann man nutzen um bestimmte Integrale gut auszurechnen. In ÜS 6 haben wir uns Symmetrien von Funktion im Detail angeschaut, jetzt können wir diese Relationen sehr gut nutzen um bestimmte Integrale zu berechnen.
Als Erinnerung:

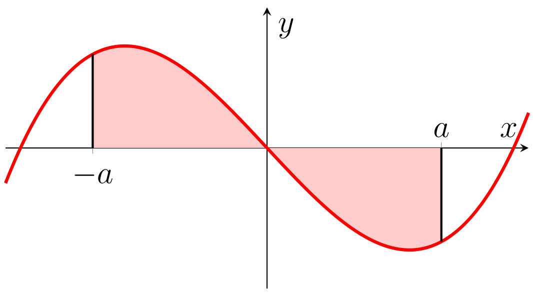
- **Gerade Fkt. (E):** $f(-x) = f(x)$
- **Ungerade Fkt. (O):** $f(-x) = -f(x)$
- **Keine Symmetrie (N):** $f(-x)$ erfüllt keine der beiden obigen Beziehungen

Bei Symmetrischen Integralgrenzen $a \in \mathbb{R}$ gilt fo.lgendes:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} E(x)\,dx &= 2 \cdot \int_{0}^{a} E(x)\,dx \\ \int_{-a}^{a} O(x)\,dx &= 0 \end{aligned}$$



Gerade Funktion (E)
$f(x) = \frac{1}{4}x^2$



Ungerade Funktion (O)
$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x$

Übungsaufgaben: Symmetrie bei Integralen

Bestimme für jedes Integral, ob der Integrand E (gerade), O (ungerade) oder N (keine Symmetrie) ist. Nutze dann (falls möglich) die Symmetrie, um das Integral zu vereinfachen. *Den numerischen Wert der Integrale musst du nicht ausrechnen.*

O · E = O

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - x)\cos(x^2)\,dx$ $= 0$

E · E = E

2. $I_2 = \displaystyle\int_{-a}^{a} (x^2 + 1)\cos(x^4)\,dx$ $= 2\displaystyle\int_0^a (x^2+1)\cos(x^4)\,dx$

E · O = O

3. $I_3 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x)\,dx$ $= 0$

~~O~~ E

4. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$ $= 2\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

5. $I_5 = \displaystyle\int_{-3}^{3} (x + \cos x)\,dx$ keine Symm.: $\underbrace{\cancel{\displaystyle\int_{-3}^{3} x\,dx}}_{=0} + \underbrace{\displaystyle\int_{-3}^{3} \cos(x)\,dx}_{2\int_0^3 \cos(x)\,dx}$

6. $I_6 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\underbrace{x^3}_{O})\,dx$ $= 0$

7. $I_7 = \displaystyle\int_{-2}^{2} \overbrace{\ln(1 + x^2)}^{E}\,dx$ $= 2\displaystyle\int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx$

O · E = O

8. $I_8 = \displaystyle\int_{-a}^{a} \arctan(x)\, e^{x^2}\,dx$ $= 0$

E

9. $I_9 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\cos(x^2)\,dx$ $= 2\displaystyle\int_0^{\pi} \ldots\, dx$

10. $I_{10} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1 + x^6}\,dx$ $= 0$

$\dfrac{O}{E} = O$

$$\int_{-a}^{a} \cancel{\sin(x^3)} + \cos(x)\,dx$$

Beispielaufgabe: Sehr schwieriges Integral

Bestimme den Wert des Integrals, untersuche dabei zuerst die Symmetrieeigenschaft des Integranden.

$$I := \int_{-e^{2\pi}}^{e^{2\pi}} \frac{\overset{E}{|x|^{|x|}} \cdot \sum_{n=1}^{20} \frac{\arccos(x^{2n})}{n!}\ E}{\tan\left(\exp\left(\sum_{n=0}^{99} x^{2n}\right)\right) \prod_{n=0}^{34} x^{2n+1}\ 0}\,dx = 0$$

K

E

$f(-x) = -f(x)$

$f(x) = |x|^{|x|}$

$f(-x) = f(x)$

$f(-x) = |-x|^{|-x|} = |x|^{|x|}$

E

$$e^{\sum_{n=0}^{99} x^{2n}} = \underbrace{e^{1 + x^2 + x^4 \dots + x^{198}}}_{E}$$

$\prod_{n=0}^{0} x^{2n+1} = x^1$

$\prod_{n=0}^{1} \rightarrow x^1 \cdot x^3 = x^4$

$\prod_{n=0}^{2} \rightarrow x^1 \cdot x^3 \cdot x^5 = x^9$

$3 \xrightarrow{\cdot x^7} x^{16}$

$4 \xrightarrow{\cdot x^9} x^{25}$

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{E \cdot E}{E \cdot 0}\,dx$$

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{E}{0}\,dx$$

$$I = \int_{-a}^{a} 0\,dx = 0$$