
Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 10

Taylorreihen II & Integration I

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 24.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Taylorreihen: Konvergenzradius und Konvergenzbereich
2. Grundbegriffe Integration & Hauptsatz der Integralrechnung
3. Standard-Stammfunktionen
4. u-Substitution
5. Partielle Integration

1 Taylorreihen und Konvergenzradius

Rückblick: Potenzreihen

Eine **Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$** ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

wobei c_n die **Koeffizienten** heissen. Für jedes feste x ist das eine gewöhnliche unendliche Reihe.

Taylorreihe als spezielle Potenzreihe

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (in einer Umgebung von x_0) beliebig oft differenzierbar, so heisst

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die **Taylorreihe von f um x_0** .

Sie ist also eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Alles, was wir über Potenzreihen (Konvergenzradius, Konvergenzintervall, ...) gelernt haben, gilt daher *direkt* auch für Taylorreihen.

Konvergenzradius und -intervall

Es gibt einen **Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$** mit:

$$|x - x_0| < R \Rightarrow \text{Reihe konvergiert absolut}, \quad |x - x_0| > R \Rightarrow \text{Reihe divergiert}.$$

Das zugehörige **Konvergenzintervall** ist $[x_0 - R, x_0 + R]$, die **Randpunkte** $|x - x_0| = R$ müssen *separat* geprüft werden.

Wie findet man R ?

Quotiententest Wenn der Grenzwert existiert,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

dann gilt

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{mit } 1/0 = \infty, 1/\infty = 0)$$

Intuition: Für $|x - x_0| < 1/L$ verhalten sich die Terme wie in einer geometrischen Reihe.

Wurzeltest Mit

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \Rightarrow R = \frac{1}{M}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$$

Beispielaufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

- Bestimme die **Taylorreihe** von f um $x_0 = 0$, das heisst schreiben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad x^0 = 1$$

und gib eine explizite Formel für c_n an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

- Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius** R dieser Reihe.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1 & : T_0(x) &= \frac{1}{0!} = 1 & = 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 & : T_1(x) &= T_0(x) + \frac{1}{1!} x = 1x = 1x \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 & : T_2(x) &= T_1(x) + \frac{1}{2!} x^2 = \frac{1}{2} x^2 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 & : T_3(x) &= T_2(x) + \frac{1}{3!} x^3 = \frac{1}{6} x^3 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \ln(1+x)$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

- Bestimme die **Taylorreihe** von g um $x_0 = 0$, das heisst schreiben

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

und gib eine explizite Formel für c_n an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

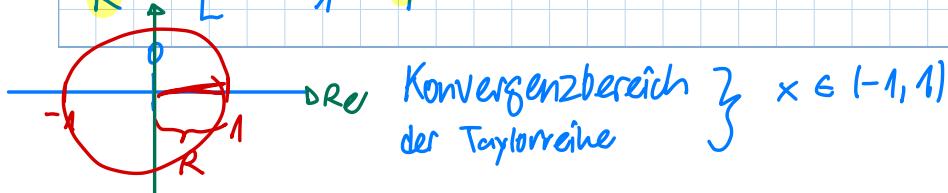
- Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius R** dieser Reihe.

| | |
|--|---|
| $\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x) \rightarrow g(0) = \ln(1) = 0 \\ g'(x) &= \frac{1}{1+x} \rightarrow g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1 \\ g''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow g''(0) = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1 \\ g'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow g'''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2 \\ g^{(IV)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \rightarrow g^{(IV)}(0) = -\frac{6}{(0+1)^4} = -6 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} c_0 &= \cancel{\frac{0}{0!}} \quad 1 = 0! \\ c_1 &= +\frac{1}{1!} \quad 1 = 1! \\ c_2 &= -\frac{1}{2!} \quad 1 = 2! \\ c_3 &= +\frac{2}{3!} \quad 2 = 3! \\ c_4 &= -\frac{6}{4!} \quad 6 = 3! \end{aligned}$ |
| $c_n = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!}$ | |
| $\left \frac{c_{n+1}}{c_n} \right = \underbrace{\left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)}_{\downarrow} : \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(n-1)!}$ | $= \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}$ |
| $= \frac{n}{n+1}$ | |

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$

$$L = \frac{1}{1+0} = 1$$



2 Integration: Grundbegriffe & Hauptsatz der Integralrechnung

Unbestimmtes Integral (Stammfunktionen)

Eine Funktion F heisst **Stammfunktion** von f , wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x$$

Das **unbestimmte Integral** von f schreiben wir als

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Lineare Regeln:

- $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$
- Konstanten können „nach vorne“ gezogen werden: $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$

Bestimmtes Integral

Die (bestimmte) Integration beschreibt in vielen Situationen die *Fläche unter einem Graphen*. Für eine Funktion $f(x)$ und ein Intervall $[a, b]$ schreiben wir

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

für den (orientierten) Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$. Für eine stetige Funktion f auf $[a, b]$ definieren wir das **bestimmte Integral**

$$\int_a^b f(x) dx$$

als die orientierte Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und b . Negatives Vorzeichen bedeutet dabei: „Fläche unterhalb der x -Achse“.

Fundamentalsatz der Analysis

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b] \in \mathbb{D}$.

(Teil I) Wir definieren

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

Das heisst: $\int f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von f .

(Teil II) Ist F eine beliebige Stammfunktion von f auf $[a, b]$, d. h. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Zusammengefasst: Ableiten und Integrieren sind (unter den passenden Voraussetzungen) inverse Operationen.

3 Standard-Stammfunktionen

In vielen Integrationsaufgaben braucht man nur einige wenige *Standardstammfunktionen*. Diese sollte man (ungefähr) auswendig kennen (oder in der Formelsammlung finden können).

$$x^2 \xrightarrow{1} 2x^1$$

Polynome und Potenzen

$$2x^1 \rightarrow \frac{2}{1+1} x^{1+1} = \frac{2}{2} x^2 = x^2$$

Für $n \neq -1$ gilt

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(Das ist die Umkehrung der Potenzregel bei Ableitungen)

Beispiele:

$$\int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3 + C, \quad \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

Konstanten:

$$\int a dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$$

Bemerkung: „inverse Kettenregel“ bei linearem Argument

Bei vielen Standardfunktionen (Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen) kann man Integrale mit *linearem Argument* sehr einfach lösen.

Ist das Argument von der Form $ax + b$ (also nur x^1 und Konstanten), dann gilt:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Man „teilt“ also einfach durch die Ableitung des Arguments ($(ax+b)' = a$). Das ist genau die **inverse Kettenregel**.

Wenn das Argument *nicht* linear ist (z.B. x^2 , \sqrt{x} oder allgemein eine kompliziertere Funktion), reicht dieses einfache „Durch- a -Teilen“ nicht mehr aus. Dann braucht man im Allgemeinen die **u-Substitution** (also die Kettenregel „rückwärts“) oder andere Methoden.

$$F(x) = e^x + C$$

$$F'(x) = f(x) = e^x$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin(3x+5) \xrightarrow{\text{Sdx}} \frac{1}{3} (-\cos(3x+5)) + C$$

$$-\frac{1}{3} \cos(3x+5) + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$\ln|x| \rightarrow \frac{1}{x}$$

Logarithmus

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Diese Formeln in Kombination mit den linearen Rechenregeln $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ reichen bereits für viele Standardaufgaben zur Integration aus.

$$\frac{1}{5x+2} \xrightarrow{\text{Sdx}} \frac{1}{5} \ln|5x+2|$$

4 u-Substitution

Die **u-Substitution** ist die Kettenregel „rückwärts“. Sie ist nützlich für Integrale der Form

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

Idee: Wir führen eine neue Variable

$$u = g(x)$$

ein. Dann ist

$$du = g'(x) dx$$

und das Integral wird zu einem einfacheren Integral in der Variable u .

Allgemeines Rezept:

1. Wähle eine Substitution $u = g(x)$ (typischerweise der innere Ausdruck).
2. Berechne $du = g'(x) dx$ und löse nach dx bzw. nach $g'(x) dx$ auf.
3. Setze alles in das Integral ein und schreibe es nur noch in u .
4. Integriere in u : $\int f(u) du = F(u) + C$.
5. Substituiere zurück: $u = g(x)$.

Beispielaufgabe

$$\int x e^{x^2} dx$$

$F(x) = \int x \cdot e^{x^2} dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \quad | : 2x \quad / dx$

$dx = \frac{1}{2x} du$

$F(u) = \int x \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x} du$

$F(u) = \int \frac{1}{2} e^u du$

$F(u) = \frac{1}{2} e^u + C$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

Merke: Wenn das Argument *linear* ist (z. B. $ax + b$), reicht es, durch a zu teilen („inverse Kettenregel“). Wenn das Argument komplizierter ist (z. B. x^2 , x^3 , \sqrt{x}), braucht man im Allgemeinen die u-Substitution.

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{x^2} dx &= F(2) - F(0) \\ &= \frac{1}{2} e^{2^2} - \frac{1}{2} e^{0^2} \end{aligned}$$

Bestimmte Integrale mit u-Substitution

Bei **bestimmten** Integralen funktioniert die u-Substitution genau gleich wie bei unbestimmten. Nur ein zusätzlicher Schritt muss noch gemacht werden: die **Integrationsgrenzen müssen angepasst werden**.

Vorgehen:

1. Wähle eine Substitution $u = g(x)$.
2. Berechne $du = g'(x) dx$ und ersetze $g'(x) dx$ durch du .
3. Rechne die neuen Grenzen aus:

$$x = a \Rightarrow u = g(a), \quad x = b \Rightarrow u = g(b)$$

4. Schreibe das Integral komplett in u mit den neuen Grenzen und integriere:

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\text{u-Substitution}} \int_{u(a)}^{u(b)} \tilde{f}(u) du = [\tilde{F}(u)]_{u(a)}^{u(b)} = \tilde{F}(u(b)) - \tilde{F}(u(a))$$

Beispielaufgabe

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 x e^{x^2} dx \\
 u &= x^2 \\
 du &= 2x dx \\
 I &= \int_0^{u(2)} x e^u \frac{1}{2} du \\
 I &= \frac{1}{2} \int_0^{u(2)} e^u du \\
 I &= \frac{1}{2} [e^u]_0^{u(2)} = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^2 \\
 I &= \frac{1}{2} (e^4 - e^0) \\
 I &= \frac{e^4 - 1}{2}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann alternativ auch ohne Grenz-Anpassung rechnen, d. h. erst wie beim unbestimmten Integral substituieren, wieder zu x zurücksubstituieren und am Schluss $F(1) - F(0)$ ausrechnen. Oft geht es aber schneller, die Grenzen direkt mit zu transformieren.

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $F(x) = \int (6x - 5)(6x^2 - 10x)^4 dx$

$$u = 6x^2 - 10x$$

$$\frac{du}{dx} = 12x - 10 \quad / \cdot dx \quad / \cdot \frac{1}{12x-10}$$

$$dx = \frac{1}{12x-10} du$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int (6x-5) u^4 \cdot \frac{1}{12x-10} du \\ F(u) &= \int \frac{6x-5}{2(6x-5)} u^4 du \\ F(u) &= \frac{1}{2} \int u^4 du \quad \rightarrow F(x) = \underline{\underline{\frac{(6x^2-10x)^5}{10} + C}} \\ F(u) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} u^5 \\ F(u) &= \frac{1}{10} u^5 + C \end{aligned}$$

2. $\int x^3 \sin(x^2) dx$ (Hinweis: Verwende eine u -Substitution und schreibe das Integral vollständig in der neuen Variablen u in der Form $\int \tilde{f}(u) du$. Das entstehende Integral muss nicht ausgewertet werden.)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^3 \sin(x^2) dx \quad \rightarrow F(u) = \int x^3 \cdot \sin(u) \cdot \frac{1}{2x} du \\ u &= x^2 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \quad / \\ dx &= \frac{1}{2x} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int \frac{x^3}{2x} \cdot \sin(u) du \\ F(u) &= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \sin(u) du \\ F(u) &= \frac{1}{2} \int u \cdot \sin(u) du \end{aligned}$$

3. $A = \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^3 \\ \frac{du}{dx} &= 3x^2 \\ dx &= \frac{1}{3x^2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{u(0)}^{u(2)} x^2 \cdot e^u \cdot \frac{1}{3x^2} du \\ A &= \frac{1}{3} \int_{u(0)=0}^{u(2)=8} e^u du \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{3} \int_0^8 e^u du$$

$$A = \frac{1}{3} [e^u]_0^8$$

$$A = \frac{1}{3} (e^8 - e^0)$$

$$A = \underline{\underline{\frac{e^8 - 1}{3}}}$$

5 Partielle Integration

Die **partielle Integration** ist die Produktregel „rückwärts“. Für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gilt:

$$\int u(x) v'(x) dx = \underbrace{u(x) v(x)}_{\downarrow u' \quad \downarrow \int dx} - \int u'(x) v(x) dx$$

In Kurzschreibweise:

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx$$

Wann benutzt man partielle Integration?

Typische Situationen:

- Produkt aus einem *Polynom* und einer „netten“ Funktion: $x^n e^x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$. Da sollte man das Polynom immer ableiten und die andere Funktion integrieren.
- Produkte mit $\ln(x)$ oder $\arctan(x)$ lassen sich nicht gut direkt integrieren, aber sehr gut ableiten. Diese haben sogar eine „höhere Priorität“, abgeleitet zu werden, als Polynome!

Ableiten

Integrieren

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$| \quad x^n$$

$$e^x \\ \cos(x) \\ \sin(x)$$

Rezept (klassisch):

1. Wähle u so, dass u' einfacher ist als u (z. B. Polynom wird kleiner).
2. Wähle v' so, dass du v leicht integrieren kannst.
3. Setze in die Formel $\int u v' dx = u v - \int u' v dx$ ein.

Beispielaufgabe

Berechne $F(x) = \int x e^x dx$

| | | |
|--------|----------|--|
| $u=x$ | $v'=e^x$ | $\rightarrow F(x) = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$ |
| $u'=1$ | $v=e^x$ | $F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$ |

$$F(x) = e^x (x - 1) + C$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

$$1. F(x) = \int (x^2 + 1) \cdot \cos(x) dx \rightarrow F(x) = (x^2+1)\sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x) dx$$

$$\begin{array}{l} u = x^2 + 1 \\ u' = 2x \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} v' = \cos(x) \\ v = \sin(x) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} u = 2x \\ u' = 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} v' = \sin(x) \\ v = -\cos(x) \end{array} \right.$$

$$F(x) = (x^2+1)\sin(x) - \left(2x \cdot (-\cos(x)) - \int 2 \cdot (-\cos(x)) dx \right)$$

$$F(x) = (x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x) - 2 \int \cos(x) dx$$

$$F(x) = (x^2+1)\sin(x) - 2\sin(x) + 2x\cos(x) + C$$

$$\underline{\underline{F(x) = (x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x) + C}}$$

$$2. F(x) = \int \ln(x) dx \text{ (Hinweis: Schreibe } \ln(x) \text{ als } \ln(x) \cdot 1).$$

$$\text{Was wäre noch } I = \int_1^2 \ln(x) dx?$$

$$\begin{array}{l} F(x) = \int \ln(x) \cdot 1 dx \\ u = \ln(x) \quad | \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \quad | \quad v = x \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow F(x) = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ F(x) = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C \\ \underline{\underline{F(x) = x \cdot (\ln(x) - 1) + C}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I = \int_1^2 \ln(x) dx = F(2) - F(1) = 2 \cdot (\ln(2) - 1) - (1 \cdot (\ln(1) - 1)) \\ \text{Fundamentalsatz der Analysis} \quad \left. \begin{array}{l} I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \\ a=1, b=2 \end{array} \right\} = 2\ln(2) - 2 - (0 - 1) \\ = 2\ln(2) - 2 + 1 \end{array}$$

$$\underline{\underline{I = 2\ln(2) - 1 \approx 0.39}}$$