

---

# Mathematik I: Analysis A

---

## Übungsstunde 10

*Taylorreihen II & Integration I*

Visva Loganathan | [vloganathan@student.ethz.ch](mailto:vloganathan@student.ethz.ch) | 24.11.2025

*Material:* [visva-loganathan.ch](https://visva-loganathan.ch)

## Überblick dieser Übungsstunde

1. Taylorreihen: Konvergenzradius und Konvergenzbereich
2. Grundbegriffe Integration & Hauptsatz der Integralrechnung
3. Standard-Stammfunktionen
4. u-Substitution
5. Partielle Integration

# 1 Taylorreihen und Konvergenzradius

## Rückblick: Potenzreihen

Eine **Potenzreihe** um den **Entwicklungspunkt**  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

wobei  $c_n$  die **Koeffizienten** heissen. Für jedes feste  $x$  ist das eine gewöhnliche unendliche Reihe.

## Taylorreihe als spezielle Potenzreihe

Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (in einer Umgebung von  $x_0$ ) beliebig oft differenzierbar, so heisst

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die **Taylorreihe von  $f$  um  $x_0$** .

Sie ist also eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

$$\frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Alles, was wir über Potenzreihen (Konvergenzradius, Konvergenzintervall, ...) gelernt haben, gilt daher *direkt* auch für Taylorreihen.

## Konvergenzradius und -intervall

Es gibt einen **Konvergenzradius**  $R \in [0, \infty]$  mit:

$$|x - x_0| < R \Rightarrow \text{Reihe konvergiert absolut}, \quad |x - x_0| > R \Rightarrow \text{Reihe divergiert}.$$

Das zugehörige **Konvergenzintervall** ist  $[x_0 - R, x_0 + R]$ , die **Randpunkte**  $|x - x_0| = R$  müssen *separat* geprüft werden.

Wie findet man  $R$ ?

**Quotiententest** Wenn der Grenzwert existiert,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

dann gilt

$$\boxed{R = \frac{1}{L}} \quad (\text{mit } 1/0 = \infty, 1/\infty = 0)$$

*Intuition:* Für  $|x - x_0| < 1/L$  verhalten sich die Terme wie in einer geometrischen Reihe.

**Wurzeltest** Mit

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{M}}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$$

## Beispielaufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x$$

und der Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

- Bestimme die **Taylorreihe** von  $f$  um  $x_0 = 0$ , das heisst schreiben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad x^0 = 1$$

und gib eine explizite Formel für  $c_n$  an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

- Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius**  $R$  dieser Reihe.

Handwritten solution on grid paper:

Calculating Taylor polynomials:

$$\begin{array}{llll} f(x) = e^x & f(0) = e^0 = 1 & : & T_0(x) = \frac{1}{0!} = 1 = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 & : & T_1(x) = T_0(x) + \frac{1}{1!}x = 1x = 1x \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 & : & T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \\ f'''(x) = e^x & f'''(0) = 1 & : & T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{3!}x^3 = \frac{1}{6}x^3 \end{array}$$

General term and ratio test:

$$c_n = \frac{1}{n!} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} \right| = \frac{n!}{(n+1)!}$$
$$= \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

Limit of the ratio:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Convergence radius:

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty$$

## Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \ln(1+x)$$

und der Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

1. Bestimme die **Taylorreihe** von  $g$  um  $x_0 = 0$ , das heisst schreiben

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

und gib eine explizite Formel für  $c_n$  an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

2. Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius**  $R$  dieser Reihe.

The handwritten solution is on a grid background. It starts with the function  $g(x) = \ln(1+x)$  and calculates the first five derivatives at  $x=0$ :

Derivative	Value at $x=0$	Coefficient $c_n$	Pattern
$g(x)$	$g(0) = \ln(1) = 0$	$c_0 = 0$	
$g'(x) = \frac{1}{1+x}$	$g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$	$c_1 = +\frac{1}{1!}$	$1 = 0!$
$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$	$g''(0) = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1$	$c_2 = -\frac{1}{2!}$	$1 = 1!$
$g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$	$g'''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2$	$c_3 = +\frac{2}{3!}$	$2 = 2!$
$g^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$	$g^{IV}(0) = -\frac{6}{(0+1)^4} = -6$	$c_4 = -\frac{6}{4!}$	$6 = 3!$

Then, the general formula for  $c_n$  is derived using the quotient test:

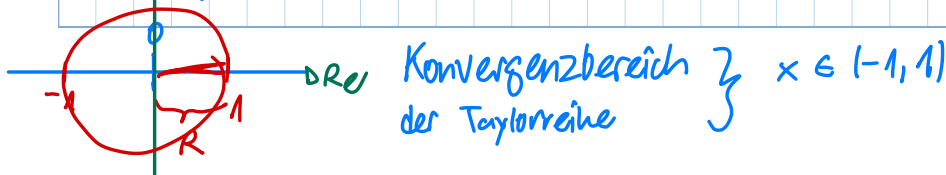
$$| \frac{c_{n+1}}{c_n} | = \left( \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \right) = \frac{n!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n}{n+1}$$

The limit is then calculated:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{1+0} = 1$$

Finally, the convergence radius  $R$  is determined:

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$



## 2 Integration: Grundbegriffe & Hauptsatz der Integralrechnung

### Unbestimmtes Integral (Stammfunktionen)

Eine Funktion  $F$  heisst **Stammfunktion** von  $f$ , wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x$$

Das **unbestimmte Integral** von  $f$  schreiben wir als

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante ist.

**Lineare Regeln:**

- $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$
- Konstanten können „nach vorne“ gezogen werden:  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$

### Bestimmtes Integral

Die (bestimmte) Integration beschreibt in vielen Situationen die **Fläche unter einem Graphen**. Für eine Funktion  $f(x)$  und ein **Intervall**  $[a, b]$  schreiben wir

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

für den (orientierten) Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f$  zwischen  $x = a$  und  $x = b$ . Für eine stetige Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  definieren wir das **bestimmte Integral**

$$\int_a^b f(x) dx$$

als die orientierte Fläche unter dem Graphen von  $f$  zwischen  $a$  und  $b$ . Negatives Vorzeichen bedeutet dabei: „Fläche unterhalb der  $x$ -Achse“.

## Fundamentalsatz der Analysis

Sei  $f$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $[a, b] \in \mathbb{D}$ .

(Teil I) Wir definieren

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

Dann ist  $F$  differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

Das heisst:  $\int f(t) dt$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .

(Teil II) Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$  auf  $[a, b]$ , d. h.  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Zusammengefasst: Ableiten und Integrieren sind (unter den passenden Voraussetzungen) inverse Operationen.

### 3 Standard-Stammfunktionen

In vielen Integrationsaufgaben braucht man nur einige wenige *Standardstammfunktionen*. Diese sollte man (ungefähr) auswendig kennen (oder in der Formelsammlung finden können).

#### Polynome und Potenzen

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \xrightarrow{1} & 2x^1 \\ 2x^1 & \rightarrow & \frac{2}{1+1} x^{1+1} = \frac{2}{2} x^2 = x^2 \end{array}$$

Für  $n \neq -1$  gilt

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(Das ist die Umkehrung der Potenzregel bei Ableitungen)

Beispiele:

$$\int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3 + C, \quad \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

Konstanten:

$$\int a dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$$

#### Bemerkung: „inverse Kettenregel“ bei linearem Argument

Bei vielen Standardfunktionen (Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen) kann man Integrale mit *linearem* Argument sehr einfach lösen.

Ist das Argument von der Form  $ax + b$  (also nur  $x^1$  und Konstanten), dann gilt:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Man „teilt“ also einfach durch die Ableitung des Arguments ( $(ax + b)' = a$ ). Das ist genau die **inverse Kettenregel**.

Wenn das Argument *nicht* linear ist (z.B.  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$  oder allgemein eine kompliziertere Funktion), reicht dieses einfache „Durch- $a$ -Teilen“ nicht mehr aus. Dann braucht man im Allgemeinen die **u-Substitution** (also die Kettenregel „rückwärts“) oder andere Methoden.



$$F(x) = e^x + 7$$

$$F'(x) = f(x) = e^x$$

## Exponentialfunktionen

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Allgemeiner, für  $a \neq 0$ :

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

## Trigonometrische Funktionen

$$\sin(3x+5) \xrightarrow{\int dx} \frac{1}{3} (-\cos(3x+5)) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x+5) + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Allgemeiner, für  $a \neq 0$ :

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$\ln|x| \rightarrow \frac{1}{x}$$

## Logarithmus

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Allgemeiner, für  $a \neq 0$ :

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Diese Formeln in Kombination mit den linearen Rechenregeln  $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$  reichen bereits für viele Standardaufgaben zur Integration aus.

$$\frac{1}{5x+2} \xrightarrow{\int dx} \frac{1}{5} \ln|5x+2|$$

## 4 u-Substitution

Die **u-Substitution** ist die Kettenregel „rückwärts“. Sie ist nützlich für Integrale der Form

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

Idee: Wir führen eine neue Variable

$$u = g(x)$$

ein. Dann ist

$$du = g'(x) dx$$

und das Integral wird zu einem einfacheren Integral in der Variable  $u$ .

### Allgemeines Rezept:

1. Wähle eine Substitution  $u = g(x)$  (typischerweise der innere Ausdruck).
2. Berechne  $du = g'(x) dx$  und löse nach  $dx$  bzw. nach  $g'(x) dx$  auf.
3. Setze alles in das Integral ein und schreibe es nur noch in  $u$ .
4. Integriere in  $u$ :  $\int f(u) du = F(u) + C$ .
5. Substituiere zurück:  $u = g(x)$ .

### Beispielaufgabe

$$\int x e^{x^2} dx$$

$$F(x) = \int x \cdot e^{x^2} dx$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad | :2x \quad | \cdot dx$$

$$dx = \frac{1}{2x} du$$

$$F(u) = \int x \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x} du$$

$$F(u) = \int \frac{1}{2} e^u du$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \cdot e^u + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

**Merke:** Wenn das Argument *linear* ist (z. B.  $ax + b$ ), reicht es, durch  $a$  zu teilen („inverse Kettenregel“). Wenn das Argument komplizierter ist (z. B.  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\sqrt{x}$ ), braucht man im Allgemeinen die u-Substitution.

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{x^2} dx &= F(2) - F(0) \\ &= \frac{1}{2} e^{2^2} - \frac{1}{2} e^{0^2} \end{aligned}$$

## Bestimmte Integrale mit u-Substitution

Bei **bestimmten** Integralen funktioniert die u-Substitution genau gleich wie bei unbestimmten. Nur ein zusätzlicher Schritt muss noch gemacht werden: die **Integrationsgrenzen müssen angepasst** werden.

### Vorgehen:

1. Wähle eine Substitution  $u = g(x)$ .
2. Berechne  $du = g'(x) dx$  und ersetze  $g'(x) dx$  durch  $du$ .
3. Rechne die neuen Grenzen aus:

$$x = a \Rightarrow u = g(a), \quad x = b \Rightarrow u = g(b)$$

4. Schreibe das Integral komplett in  $u$  mit den neuen Grenzen und integriere:

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\text{u-Substitution}} \int_{u(a)}^{u(b)} \tilde{f}(u) du = \left[ \tilde{F}(u) \right]_{u(a)}^{u(b)} = \tilde{F}(u(b)) - \tilde{F}(u(a))$$

## Beispielaufgabe

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x e^{x^2} dx \\ u &= x^2 \\ dx &= \frac{1}{2x} du \\ I &= \int_{u(0)}^{u(2)} x \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x} du \\ I &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du \\ I &= \frac{1}{2} [e^u]_0^4 \longrightarrow I = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^2 \\ I &= \frac{1}{2} (e^4 - e^0) \\ I &= \frac{e^4 - 1}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung: Man *kann* alternativ auch ohne Grenz-Anpassung rechnen, d. h. erst wie beim unbestimmten Integral substituieren, wieder zu  $x$  zurücksostituieren und am Schluss  $F(1) - F(0)$  ausrechnen. Oft geht es aber schneller, die Grenzen direkt mit zu transformieren.

## Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1.  $F(x) = \int (6x - 5)(6x^2 - 10x)^4 dx$

$$\begin{aligned}
 u &= 6x^2 - 10x \\
 \frac{du}{dx} &= 12x - 10 \quad / \cdot dx \quad / \cdot \frac{1}{12x - 10} \\
 dx &= \frac{1}{12x - 10} du
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 F(u) &= \int (6x - 5) u^4 \cdot \frac{1}{12x - 10} du \\
 F(u) &= \int \frac{\cancel{6x - 5}}{2 \cancel{(6x - 5)}} u^4 du \\
 F(u) &= \frac{1}{2} \int u^4 du \\
 F(u) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} u^5 \\
 F(u) &= \frac{1}{10} u^5 + C
 \end{aligned}
 \right.
 \quad \rightarrow \quad
 \underline{\underline{F(x) = \frac{(6x^2 - 10x)^5}{10} + C}}$$

2.  $\int x^3 \sin(x^2) dx$  (Hinweis: Verwende eine  $u$ -Substitution und schreibe das Integral vollständig in der neuen Variablen  $u$  in der Form  $\int \tilde{f}(u) du$ . Das entstehende Integral muss nicht ausgewertet werden.)

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int x^3 \sin(x^2) dx \\
 u &= x^2 \\
 \frac{du}{dx} &= 2x \quad / \\
 dx &= \frac{1}{2x} du
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 F(u) &= \int x^3 \cdot \sin(u) \cdot \frac{1}{2x} du \\
 F(u) &= \int \frac{x^3}{2x} \cdot \sin(u) du \\
 F(u) &= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \sin(u) du \\
 F(u) &= \frac{1}{2} \int u \cdot \sin(u) du
 \end{aligned}$$

3.  $A = \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx$

$$\begin{aligned}
 u &= x^3 \\
 \frac{du}{dx} &= 3x^2 \\
 dx &= \frac{1}{3x^2} du
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 A &= \int_{u(0)}^{u(2)} x^2 \cdot e^u \cdot \frac{1}{3x^2} du \\
 A &= \frac{1}{3} \int_{u(0)=0^3=0}^{u(2)=2^3=8} e^u du \\
 A &= \frac{1}{3} \int_0^8 e^u du \\
 A &= \frac{1}{3} [e^u]_0^8 \\
 A &= \frac{1}{3} (e^8 - e^0) \\
 A &= \underline{\underline{\frac{e^8 - 1}{3}}}
 \end{aligned}$$

## 5 Partielle Integration

Die **partielle Integration** ist die Produktregel „rückwärts“. Für zwei Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  gilt:

$$\int u(x) v'(x) dx = \overbrace{u(x) v(x)} - \int \overbrace{u'(x) v(x)} dx$$

$\downarrow u'$     $\downarrow \int dx$     $\downarrow v$

In Kurzschreibweise:

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx$$

### Wann benutzt man partielle Integration?

Typische Situationen:

- Produkt aus einem *Polynom* und einer „netten“ Funktion:  $x^n e^x$ ,  $x^n \sin x$ ,  $x^n \cos x$ .  
Da sollte man das Polynom immer ableiten und die andere Funktion integrieren.
- Produkte mit  $\ln(x)$  oder  $\arctan(x)$  lassen sich nicht gut direkt integrieren, aber sehr gut ableiten. Diese haben sogar eine „höhere Priorität“, abgeleitet zu werden, als Polynome!

Ableiten

Integrieren

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$x^n$

$e^x$   
 $\cos(x)$   
 $\sin(x)$

**Rezept (klassisch):**

1. Wähle  $u$  so, dass  $u'$  einfacher ist als  $u$  (z. B. Polynom wird kleiner).
2. Wähle  $v'$  so, dass du  $v$  leicht integrieren kannst.
3. Setze in die Formel  $\int u v' dx = u v - \int u' v dx$  ein.

### Beispielaufgabe

Berechne  $F(x) = \int x e^x dx$

$$\begin{array}{l|l} u=x & v'=e^x \\ u'=1 & v=e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow F(x) &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ F(x) &= x \cdot e^x - e^x + C \\ F(x) &= e^x (x - 1) + C \end{aligned}$$

$\int \frac{1}{2} x^2 e^x dx$

## Übungsaufgabe (für die Studierenden)

1.  $F(x) = \int (x^2 + 1) \cdot \cos(x) dx \rightarrow F(x) = (x^2 + 1) \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x) dx$

$$\begin{array}{l|l} u = x^2 + 1 & v' = \cos(x) \\ u' = 2x & v = \sin(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} u = 2x & v' = \sin(x) \\ u' = 2 & v = -\cos(x) \end{array}$$

$$F(x) = (x^2 + 1) \sin(x) - \left( 2x \cdot (-\cos(x)) - \int 2 \cdot (-\cos(x)) dx \right)$$

$$F(x) = (x^2 + 1) \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \underbrace{\int \cos(x) dx}_{\sin(x)}$$

$$F(x) = (x^2 + 1) \sin(x) - 2 \sin(x) + 2x \cos(x) + C$$

$$\underline{\underline{F(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + C}}$$

2.  $F(x) = \int \ln(x) dx$  (Hinweis: Schreibe  $\ln(x)$  als  $\ln(x) \cdot 1$ ).

Was wäre noch  $I = \int_1^2 \ln(x) dx$ ?

$$\begin{array}{l} F(x) = \int \ln(x) \cdot 1 dx \\ \left. \begin{array}{l} u = \ln(x) \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} F(x) = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ F(x) = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C \\ \underline{\underline{F(x) = x \cdot (\ln(x) - 1) + C}} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I = \int_1^2 \ln(x) dx = F(2) - F(1) = 2 \cdot (\ln(2) - 1) - (1 \cdot (\ln(1) - 1)) \\ \text{Fundamentalsatz der Analysis} \left\{ \begin{array}{l} I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \\ = 2 \ln(2) - 2 - (0 - 1) \\ = 2 \ln(2) - 2 + 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\underline{\underline{I = 2 \ln(2) - 1 \approx 0.39}}$$