Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 8

Regel von l'Hôpital, Mittelwertsatz & Kurvendiskussion

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 10.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Regel von Bernoulli–l'Hôpital
2. Mittelwertsatz
3. Kurvendiskussion - Allgemein
4. Kurvendiskussion - Zusatz (Gebrochenrationale Funktionen)

1 Regel von Bernoulli–l'Hôpital

Kurztheorie

Die Regel von Bernoulli–l'Hôpital hilft bei Grenzwerten der Formen

$$\frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Sind f, g in einer Umgebung von a differenzierbar (ausser evtl. in a) und $g'(x) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert oder $\pm\infty$ ist. Vorher immer prüfen, ob tatsächlich eine unbestimmte Form vorliegt: bei anderen Formen zuerst umformen (z. B. Produkt $\to$ Quotient, rationalisieren, logarithmieren).

Beispielaufgabe

Berechne

$$L = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{2}{x}}$$

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left((1+x)^{\frac{2}{x}} \right) \quad / \ln$$

$$\ln(L) = \lim_{x \to 0^+} \left(\ln\left((1+x)^{\frac{2}{x}} \right) \right)$$

$$\ln(L) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x} \ln(1+x) \right)$$

$$\ln(L) = 2 \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) \quad \Big\} \ \text{"}\frac{\ln(1)}{0}\text{"} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\ln(L) = 2 \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x+1}}{1} \right)$$

$$\ln(L) = 2 \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

$$\ln(L) = 2 \cdot \frac{1}{0+1}$$

$$\ln(L) = 2 \quad / e^{\wedge}$$

$$e^{\ln(L)} = e^2$$

$$\underline{\underline{L = e^2 \approx 7.39}}$$

Typische Fallstricke

- Nicht anwenden bei $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 usw. — zuerst umformen.
- Voraussetzungen prüfen: Differenzierbarkeit in der Umgebung, Nennerableitung ungleich 0.
- Nach einer Anwendung bleibt oft noch eine unbestimmte Form bestehen $\Rightarrow$ Regel von l'Hôpital nochmals anwenden oder geschickter umformen.

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$: $L = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \Big\} \dfrac{-\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{l'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)$

$$L = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot(-x^2)\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \underline{\underline{0}}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} \Big\} \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'H}} \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(x)-1}{3x^2}\right) \Big\} \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'H}} \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-\sin(x)}{6x}\right) \Big\} \dfrac{0}{0}$

$$\xrightarrow{\text{l'H}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos(x)}{6}\right) = \frac{-\cos(0)}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+a\,x}-1}{x} \quad (a\in\mathbb{R}) \Big\}$ „$\dfrac{0}{0}$"

$u = x^{1/2}$ | $v = 1+ax$

$u' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ | $v' = a$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{a}{2\sqrt{1+ax}}}{1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{2\sqrt{1+ax}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{1+a\cdot 0}} = \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\tan(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sinh(x)}{\tan(x)}\right) \Big\}$ „$\dfrac{0}{0}$" $\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cosh(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}}\right)$

$$2\lim_{x\to 0}\left(\cos^2(x)\cdot\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right) = \cancel{2}\cdot\cos^2(0)\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}\left(e^0+e^{-0}\right)$$

$$= 1\cdot(1+1) = 1\cdot 2 = \underline{\underline{2}}$$

2 Mittelwertsatz

Kurztheorie

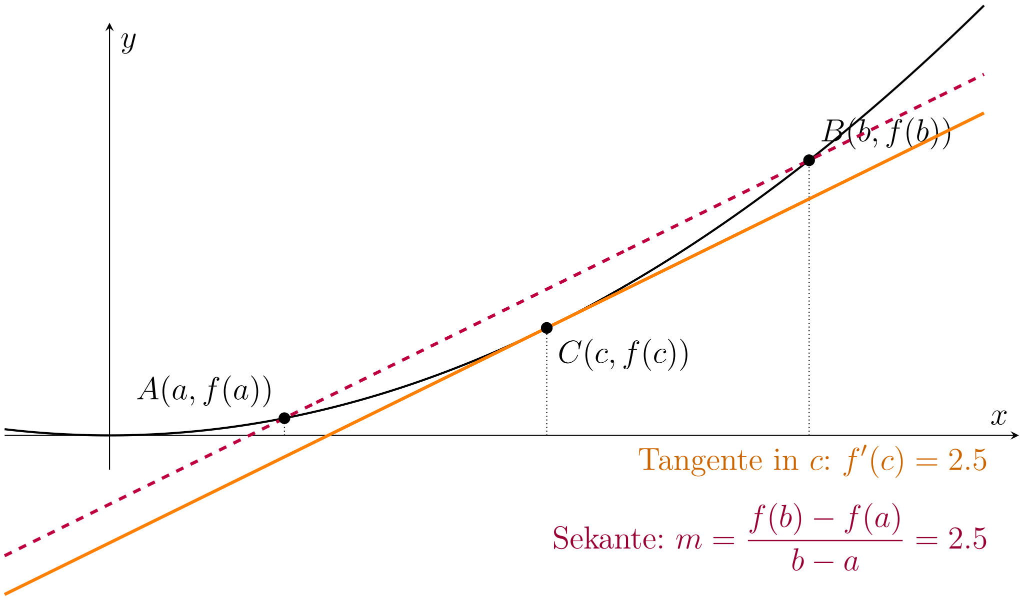
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrische Bedeutung: Die Tangentensteigung im Punkt $x = c$ (=*momentane Änderungsrate* $f'(c)$) ist gleich der Sekantensteigung durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (=*durchschnittliche Änderungsrate* auf $[a, b]$).

Nicht relevant

Spezialfall (Rolle): Wenn zusätzlich $f(a) = f(b)$ gilt, existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$ (waagrechte Tangente).



Beispielfunktion $f(x) = x^2$ *mit* $a = 0.5$ *und* $b = 2$

Beispielaufgabe

Zeigen Sie, dass ein $c \in (0, \pi)$ existiert, so dass

$$f'(c) = \sin(c) = \frac{2}{\pi}.$$

Hinweis: Wähle eine geeignete Stammfunktion mit $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \sin(x)$ und wende den Mittelwertsatz an, um die Existenz eines solchen c nachzuweisen.

gegeben
$a = 0, \; b = \pi$
$f'(x) = \sin(x)$
$\downarrow \int dx$
$f(x) = -\cos(x)$

$$f'(c) = \sin(c) = \frac{2}{\pi} = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{-\cos(\pi) + \cos(0)}{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{-(-1) + 1}{\pi} \longrightarrow \frac{1+1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. **Direkte Anwendung (Polynom):** Finde $c \in (1, 4)$ gemäss Mittelwertsatz für $f(x) = x^2$ auf $[1, 4]$.

$a = 1,\ b = 4$
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$

$$f'(c) = 2c = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$
$$2c = \frac{4^2 - 1^2}{3}$$
$$2c = \frac{15}{3}$$
$$2c = 5 \quad /:2$$
$$\underline{\underline{c = 2.5}}$$

2. **Trigonometrisch (Existenz eines c):** Zeige, dass es ein $c \in (0, \pi)$ gibt mit

$$\cos(c) = \frac{\sin(\pi) - \sin(0)}{\pi - 0}.$$

$a = 0,\ b = \pi$
$f'(x) = \cos(x)$
$\downarrow \int dx$
$f(x) = \sin(x)$

$$\cos(c) = \frac{\sin(\pi) - \sin(0)}{\pi}$$
$$\cos(c) = \frac{0 - 0}{\pi}$$
$$\cos(c) = 0$$

Wann ist $\cos(c) = 0$?

$$\underline{\underline{c = \frac{\pi}{2}}}$$

3. **Exponentialfunktion:** Finde $c \in (0, 1)$ gemäss Mittelwertsatz für $f(x) = e^x$ auf $[0, 1]$.

$a = 0,\ b = 1$
$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$

$$f'(c) = e^c = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$
$$e^c = \frac{e^1 - e^0}{1}$$
$$e^c = e - 1 \quad /\ln$$
$$\ln(e^c) = \ln(e - 1)$$

$$\underline{\underline{c = \ln(e - 1) \approx 0.54}}$$

4. **Rolle (gleiche Randwerte):** Zeige: Für $f(x) = x^2 - 4x + 3$ auf $[1, 3]$ existiert ein $c \in (1, 3)$ mit $f'(c) = 0$. Bestimme ein solches c.

$a = 1,\ b = 3$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$
$f'(x) = 2x - 4$

$$f'(c) = 2c - 4 = 0 \quad /+4$$
$$2c = 4 \quad /:2$$
$$\underline{\underline{c = 2}}$$

3 Kurvendiskussion - Allgemein

Kritische Punkte und Klassifikation

Kritische Punkte: Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{D}_f$ heisst *kritisch*, wenn

$$f'(x_0) = 0.$$

Diese Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ (und ggf. Randpunkte eines betrachteten Intervalls) sind Kandidaten für lokale Extrema oder Sattel-/Wendepunkte.

Zweiter Ableitungstest: Hat man die Nullstellen von $f'(x)$, also die x_0, gefunden, dann setzt man sie in die zweite Ableitung $f''(x)$ ein und betrachtet den Wert:

$$\begin{aligned} f''(x_0) < 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{lokales Maximum} \\ f''(x_0) > 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{lokales Minimum} \\ f''(x_0) = 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{keine Entscheidung} \quad (\text{z. B. Sattel/Wendepunkt möglich}) \end{aligned}$$

Spezialfall: Wendepunkte & Sattelpunkte Zum *Ermitteln* von Wendepunkten geht man ähnlich vor wie beim Ermitteln von Maxima und Minima, findet in diesem Fall aber die Nullstellen der zweiten Ableitung $f''(x_0) = 0$. Das sind Wendepunkte.

WP: $f''(x_0)=0$

SP: $f''(x_0)=0$
$f'(x_0)=0$

Sattelpunkte sind ein Spezialfall von Wendepunkten. Falls man einen Wendepunkt gefunden hat, setzt man dieses x_0 in die erste Ableitung ein. Ergibt sich $f'(x_0) = 0$, dann hat man einen Sattelpunkt. Alle Sattelpunkte sind Wendepunkte (da sie ein Spezialfall von Wendepunkten sind), aber umgekehrt gilt nicht, dass alle Wendepunkte Sattelpunkte sind. Man kann es sich so merken: Alle Tauben (Sattelpunkte) sind Vögel (Wendepunkte), aber nicht alle Vögel sind Tauben!

Sattelpunkt – freiwilliger Zusatztest Erfüllt ein x_0 die *notwendige Bedingung*:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) = 0,$$

Dann kann man mit der *hinreichenden Bedingung* nochmals zusätzlich bestätigen, dass es sich auch wirklich um einen Sattelpunkt handelt:

$$f'''(x_0) \neq 0$$

Hinweis: Ist dagegen $f'''(x_0) = 0$, sagt dieser Test nichts aus – dann benötigt es eine andere Prüfung (müssen wir aber nicht machen in diesem Kurs).

Wachstumsverhalten

Interpretation von $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Rightarrow f \text{ wächst} \\ f'(x) < 0 &\Rightarrow f \text{ fällt} \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow \text{Kandidat für ein Extremum / Plateau} \end{aligned}$$

Vorgehen: Die *kritischen Punkte* (Nullstellen von f') sowie Stellen, an denen f' nicht definiert ist (sofern $x \in \mathbb{D}_f$), unterteilen den Definitionsbereich in Intervalle. Wähle in jedem Intervall einen Testpunkt und bestimme das Vorzeichen von f': daraus folgt, ob f dort wächst oder fällt.
Merksatz: Lokale Extrema können nur an kritischen Punkten oder an Randpunkten eines betrachteten Intervalls auftreten.

Krümmungsverhalten

Interpretation von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Rightarrow \text{Kurve ist } \textit{konvex} \text{ (linksgekrümmt)} \\ f''(x) < 0 &\Rightarrow \text{Kurve ist } \textit{konkav} \text{ (rechtsgekrümmt)} \\ f''(x) = 0 &\Rightarrow \text{Kandidat für einen Wendepunkt} \end{aligned}$$

Vorgehen: Gleiches Vorgehen wie bei Wachstumsverhalten, aber statt die kritischen Punkte (Nullstellen und Definitionslücken der ersten Ableitung), schaut man sich die Nullstellen der zweiten Ableitung $f''(x_0) = 0$ an und unterteilt den Definitionsbereich nach ihnen. In jedem Intervall wählt man dann einen Testpunkt und bestimmt das Vorzeichen von f'': Daraus folgt das Krümmungsverhalten der Funktion.
Merksatz: Ein *Wendepunkt* liegt vor, wenn sich das Krümmungsverhalten an einer Stelle ändert (von konvex zu konkav oder umgekehrt).

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Führe eine vollständige Kurvendiskussion (Definitionsbereich, kritische Punkte, Wachstums- und Krümmungsverhalten) von folgender Funktion durch:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$$

1) Definitionsbereich

$D_f = \mathbb{R}$

2) $f'(x)$ und $f''(x)$

$f'(x) = x^4 - 4x^2 : D_{f'} = \mathbb{R}$

$f''(x) = 4x^3 - 8x : D_{f''} = \mathbb{R}$

3) Extremwerte

$0 = f'(x)$

$0 = x^4 - 4x^2$

$0 = x^2(x^2 - 4)$

$0 = \underbrace{x^2(x+2)(x-2)}$

$x_1 = -2$	$f(-2) \approx 4.27$	$P_1(-2\mid 4.27)$
$x_2 = 0$	$f(0) = 0$	$P_2(0\mid 0)$
$x_3 = 2$	$f(2) = -4.27$	$P_3(2\mid -4.27)$

$f''(-2) = 4(-2)^3 - 8(-2) = -16 < 0$: Max

$f''(0) = 4 \cdot 0^3 - 8 \cdot 0 = 0$: SP?

$f''(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 16 > 0$: Min

4) WP / SP

$0 = f''(x) \longrightarrow 0 = 4x\,\overbrace{(x^2 - 2)}^{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$

$x_1 = 0 \longrightarrow f'(0) = 0$ } Sattelpunkt

$x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ } Wendepunkte

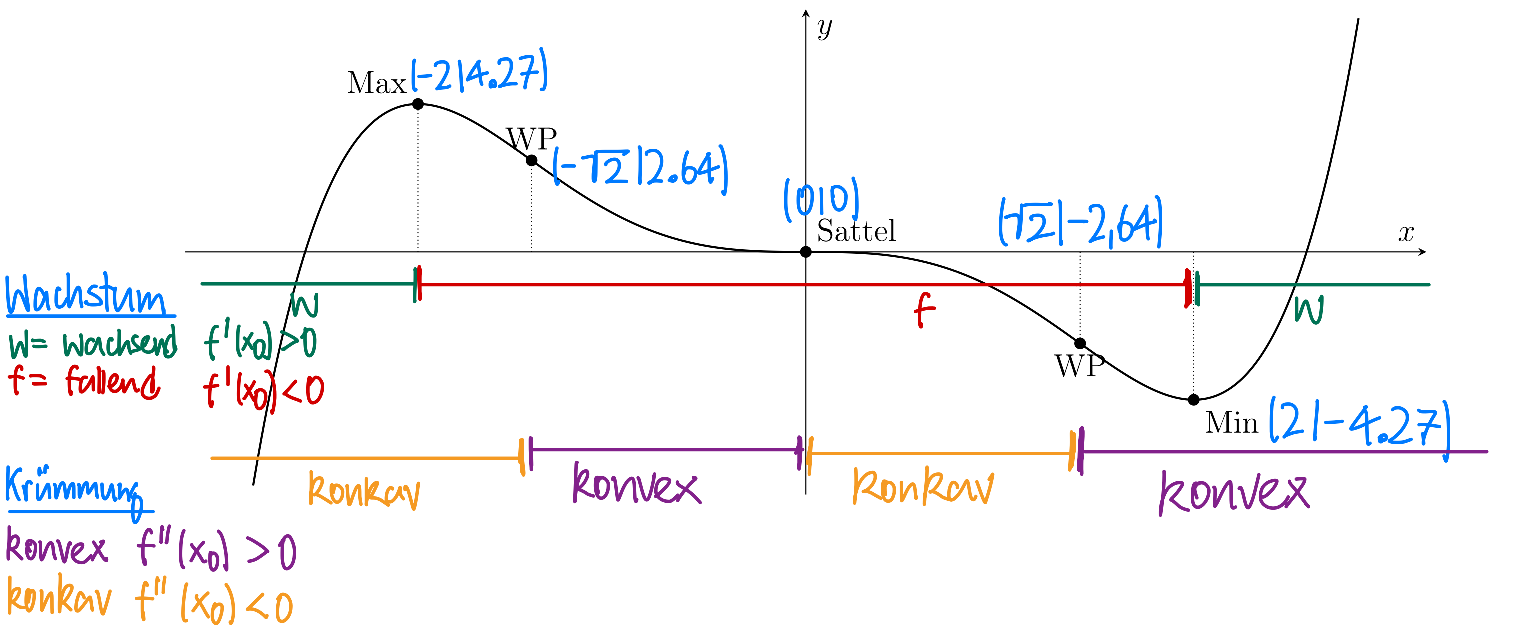
$f(0) = 0$

$f(-\sqrt{2}) \approx 2.64$

$f(\sqrt{2}) \approx -2.64$

5 & 6) Wachstums & Krümmung

Mache ich (aus Zeitgründen) nicht vollständig mit Testpunkten



Was man zusätzlich machen könnte

Das oben Beschriebene ist das *Mindestmass* für eine vollständige Kurvendiskussion (allgemein für alle Funktionen). Je nach Funktionstyp kann man jedoch noch mehr untersuchen.

Allgemein (für alle Funktionen):

- **Nullstellen** der Funktion bestimmen.
- **Symmetrie** der Funktion bestimmen (gerade, ungerade oder keine Symmetrie).
- **Grenzwerte** untersuchen: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ (Verhalten im Unendlichen) sowie Grenzwerte an *Definitionslücken*.
- **Wertebereich** (Bildmenge) abschätzen/bestimmen.
- **Skizze** des Funktionsgraphen aufzeichnen.

Funktionstyp-spezifisch:

- **Trigonometrische Funktionen:** Periodizität ermitteln.
- **Gebrochenrationale Funktionen:** *Asymptoten* (vertikal/horizontal/schief) und *Definitionslücken* unterscheiden (hebbare Lücken vs. Polstellen).

Insbesondere **Asymptoten & Definitionslücken** bei gebrochenrationalen Funktionen sind für uns wichtig – diese betrachten wir im nächsten Abschnitt genauer.

4 Kurvendiskussion - Gebrochenrationale Funktionen

Fall: Zählergrad $\geq$ Nennergrad

Wenn der Zählergrad $\geq$ Nennergrad ist: *sofort* Polynomdivision machen.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{(\text{Quotient-Polynom})}_{\text{Asymptotenfunktion } A(x)} + \underbrace{\frac{\text{Divisionsrest}(x)}{q(x)}}_{\text{Restfunktion R(x)}}$$

Damit hat man in *einem* Schritt:

- die **Asymptote**: Asymptotenfunktion A(x)
- die **Art der Definitionslücke** bei Nullstellen von q:
  - **Rest** $\equiv 0 \Rightarrow$ **hebbare** Lücke ("Loch")
  - **Rest** $\neq 0 \Rightarrow$ **Polstelle** (vertikale Asymptote)

Beispiel: hebbare Definitionslücke

$$\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}} = (x-1)$$

Gegeben sei

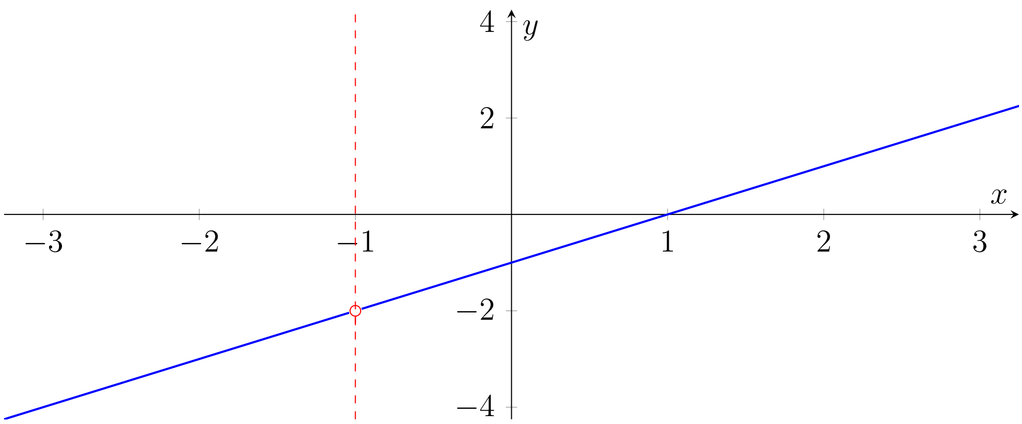
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Führe Polynomdivision durch und zeige, dass es sich um eine hebbare Lücke handelt.

$$x^2 + 0x - 1 : x + 1 = x - 1$$
$$-(x^2 + x)$$
$$0 - x - 1$$
$$-(-x - 1)$$
$$0$$

$$f(x) = x - 1 + \cancel{\frac{0}{x+1}}$$

$$f(x) = x - 1 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



Beispiel: Polstelle

Gegeben sei

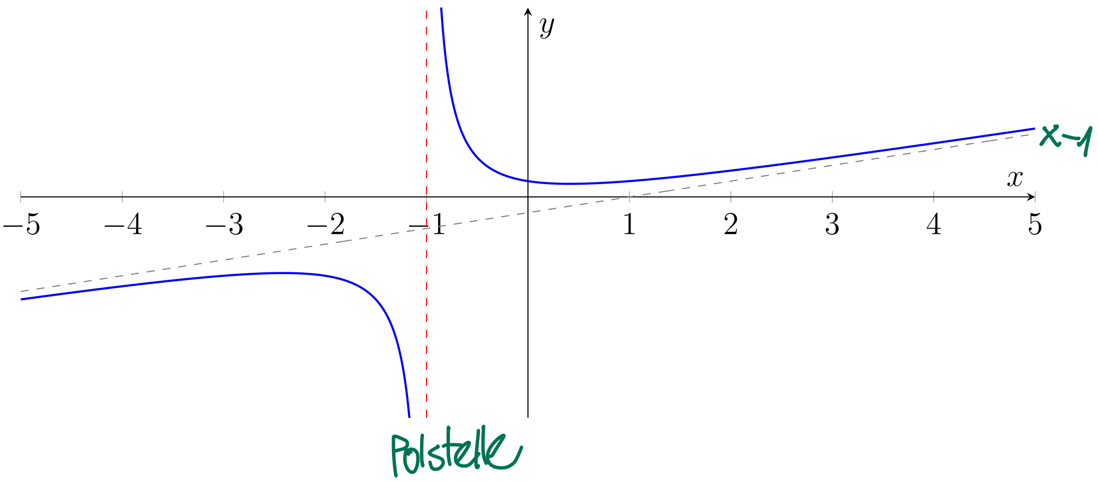
$$g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}, \qquad \mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Führe Polynomdivision durch und zeige, dass es sich um eine Polstelle handelt.

$$x^2 + 0x + 1 : x+1 = x$$
$$-(x^2 + x)$$
$$-x - 1 : x+1 = -1$$
$$-x - 1$$
$$2$$

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$$

$$f(x) = \underbrace{x - 1}_{\text{Asymptote}} + \frac{2}{x+1} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$



Fall: Zählergrad < Nennergrad

Wenn der Zählergrad < Nennergrad ist: *Keine Polynomdivision möglich:*
Sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q und $\deg p < \deg q$, dann gilt automatisch:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \text{horizontale Asymptote: } y = 0 \text{ (x-Achse).}$$

Die Asymptote ist bei solchen Funktionen demnach immer automatisch die Gerade $y = 0$ (die x-Achse).

Vorgehen bei Definitionslücken:

- **Kürzen prüfen:** Haben p und q einen gemeinsamen Faktor $(x-a)$, so kann man kürzen:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-a)\,\tilde{p}(x)}{(x-a)\,\tilde{q}(x)} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} \quad (x \neq a).$$
Dann liegt bei $x = a$ eine *hebbare Lücke* (Loch) vor.

- **Polstellen:** Nullstellen des (nach dem Kürzen) verbleibenden Nenners liefern *Polstellen* (vertikale Asymptoten).

Beispiel: hebbare Lücke und Polstellen

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)(x-3)}$$

Aufgabe: Bestimme die Definitionslücken von f und klassifiziere sie durch geeignetes Kürzen in *hebbare Lücken* und *Polstellen.*

Hinweis: Überlege zuerst, für welche x der Nenner null wird, und prüfe anschliessend, ob sich gemeinsame Faktoren mit dem Zähler kürzen lassen.

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x-3)} = \frac{x+2}{(x+1)(x-3)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -3\}$

$x = -1, 3$ Polstellen

$x = 1$ Hebbare Definitionslücke

Kurvendiskussion – Schritt-für-Schritt (Mindestmass)

1. **Definitionsbereich bestimmen**
   Wo ist f definiert? (Nenner $\neq 0$, Wurzel-Argument ≥ 0, Log-Argument > 0, …)

2. **Ableitungen berechnen**
   Finde $f'(x)$ und $f''(x)$ (mit ihren Definitionsbereichen).

3. **Extrema finden (2. Ableitungstest)**
   Bestimme die Nullstellen von $f'(x)$; setze diese x_0 in $f''(x)$ ein:

$$\begin{aligned} f''(x_0) < 0 &\quad \Rightarrow \text{lokales Maximum} \\ f''(x_0) > 0 &\quad \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\ f''(x_0) = 0 &\quad \Rightarrow \text{keine Entscheidung} \end{aligned}$$

4. **Wendepunkte / Sattelpunkte finden**
   Bestimme die Nullstellen von $f''(x)$ (Kandidaten für Wendepunkte). Sattelpunkt, falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$.

5. **Wachstumsverhalten / Monotonie (mit f')**
   Teile den Definitionsbereich durch *Definitionslücken* und *kritische Punkte* (Nullstellen von f') in Intervalle. Wähle pro Intervall einen Testpunkt x_0 und prüfe $f'(x_0)$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) > 0 &\quad \Rightarrow f \text{ ist (streng) monoton wachsend} \\ f'(x_0) < 0 &\quad \Rightarrow f \text{ ist (streng) monoton fallend} \end{aligned}$$

6. **Krümmungsverhalten (mit f'')**
   Teile den Definitionsbereich durch *Wendepunkt-Kandidaten* (Nullstellen von f'') in Intervalle. Prüfe pro Intervall einen Testpunkt x_0:

$$\begin{aligned} f''(x_0) > 0 &\quad \Rightarrow \text{konvex (linksgekrümmt)} \\ f''(x_0) < 0 &\quad \Rightarrow \text{konkav (rechtsgekrümmt)} \end{aligned}$$