Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 6

Funktionen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 27.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

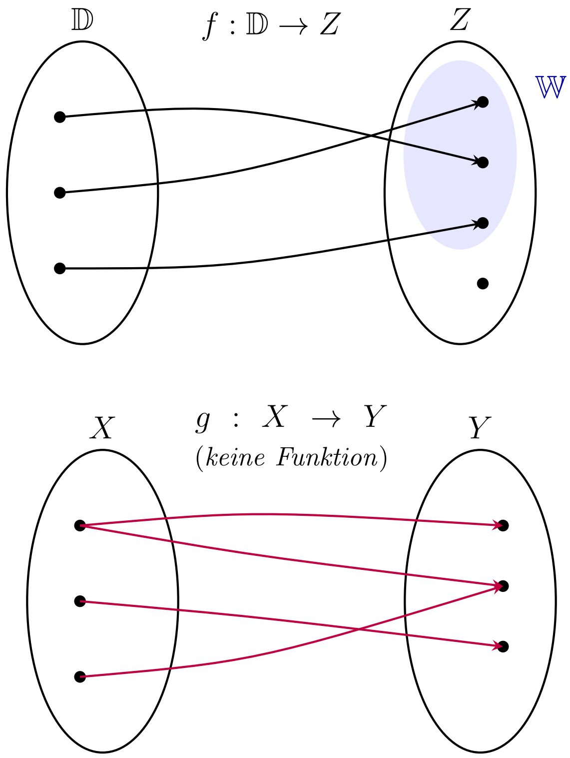
Überblick dieser Übungsstunde

1. Begriffe & Notation von Funktionen
2. Injektivität, Surjektivität & Bijektivität
3. Umkehrfunktion
4. Exkurs: Symmetrie von Funktionen

1 Begriffe & Notation von Funktionen

Kurztheorie. Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung $f : \mathbb{D} \to Z$

- **Definitionsmenge (Domain)**: $\mathbb{D}$ (mögliche Inputs)
- **Zielmenge**: Z
- **Bild-/Wertemenge**: $\mathbb{W} = f(\mathbb{D}) = \{\, f(x) \mid x \in \mathbb{D} \,\}$ (mögliche Outputs)
- **Urbild**: Für $S \subseteq Z$ ist $f^{-1}(S) = \{\, x \in \mathbb{D} \mid f(x) \in S \,\}$
- **Graph**: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{D}\}$

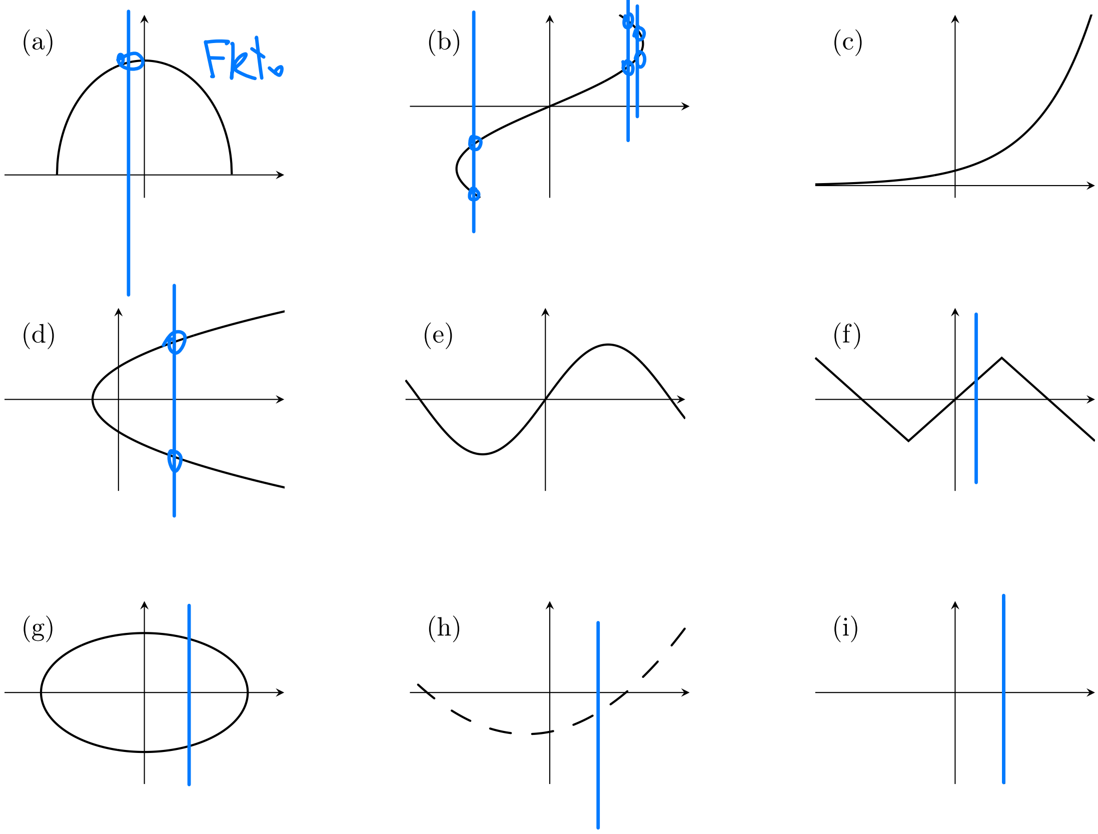


Oben: Funktion mit Bildmenge $\mathbb{W} = f(\mathbb{D})$ (nicht surjektiv). Unten: Zuordnung, die keine Funktion ist.

Mehr Informationen und Aufgaben zu Definitionsmenge und Wertemenge sind in den Blättern von ÜS 1 vorhanden.

Herausfinden, dass eine Zuordnung eine Funktion ist:
Jedes x hat höchstens einen y-Wert, niemals mehrere! (sonst ist es nicht eindeutig und daher keine Funktion). Das kann man mit dem **Vertikal-Linien-Test** prüfen.

Übungsaufgabe: Sind das Funktionen oder keine Funktionen?



2 Injektivität, Surjektivität & Bijektivität

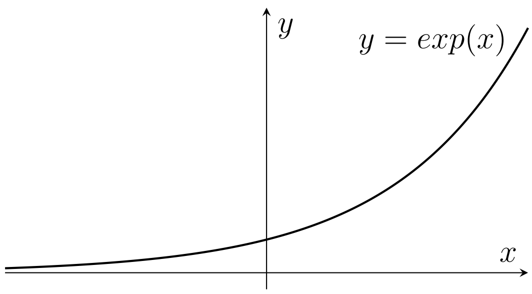
- **Injektiv** (Eindeutigkeit):
  Verschiedene x liefern verschiedene y.
  Merksatz: Für jedes y (in der Wertemenge) *höchstens* ein x
  Beispiele: $x \mapsto e^x$ ist injektiv auf $\mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* injektiv (aber z. B. auf $[0, \infty)$ schon).

- **Surjektiv** (Vollständigkeit):
  Jedes y im Zielbereich wird getroffen.
  Merksatz: Für jedes y *mindestens* ein x
  Beispiele: $x \mapsto \sin x$ ist surjektiv auf $[-1, 1]$; $x \mapsto e^x$ ist *nicht* surjektiv auf $\mathbb{R}$ (wohl aber auf $(0, \infty)$).

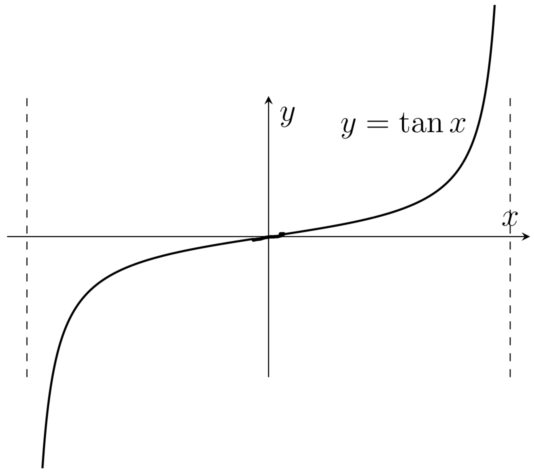
- **Bijektiv** (eins-zu-eins auf den Zielbereich):
  Injektiv *und* surjektiv $\Rightarrow$ Für jedes y *genau* ein x
  Konsequenz: Es existiert eine Umkehrfunktion f^{-1} (man kann x und y „tauschen“).
  Beispiel: $x \mapsto x^3$ ist bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Hinweis: ***(Horizontal-Linien-Test):*** Ein Graph ist injektiv, wenn jede horizontale Gerade ihn höchstens einmal schneidet.

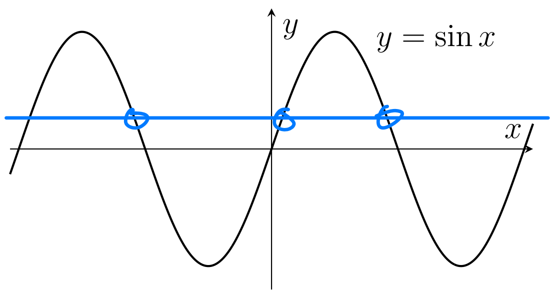
Aufgaben: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv (Eigenschaft bestimmen)



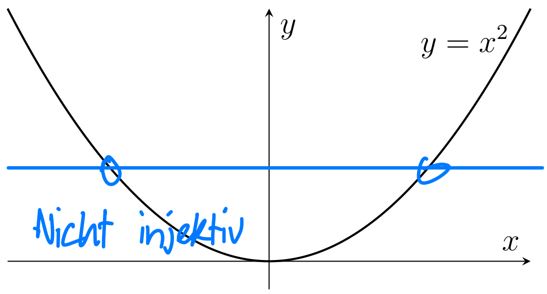
Gegeben: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
Eigenschaft: Injektiv, nicht surjektiv
Bild $y \in (0, \infty)$



Gegeben: $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \tan x$
Eigenschaft: injektiv & surjektiv = surjektiv



Gegeben: $h : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $h(x) = \sin x$
Eigenschaft: Surjektiv, nicht injektiv



Gegeben: $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j(x) = x^2$
Eigenschaft: Nicht surjektiv
Bild $y \in [0, \infty)$

Einschränken von Definitions- und Wertebereich (Beispiel $\sin x$)

- **Ohne Einschränkung:**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x.$$

Eigenschaft: weder injektiv noch surjektiv (Bildmenge $[-1, 1] \subsetneq \mathbb{R}$).

- **Nur Wertebereich passend wählen:**

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad f(x) = \sin x.$$

Eigenschaft: **surjektiv**, aber nicht injektiv (viele x liefern dasselbe y).

- **Nur Definitionsbereich einschränken:**

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x.$$

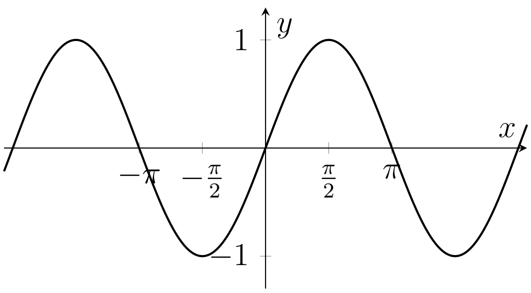
Hinweis: Bildmenge bleibt $[-1, 1]$, also nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$.

- **Beides passend einschränken (Standardwahl):**

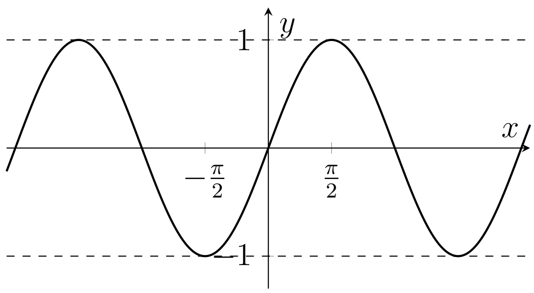
$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1], \qquad f(x) = \sin x.$$

Eigenschaft: **bijektiv** (streng monoton steigend $\Rightarrow$ injektiv; Bild $= [-1, 1] \Rightarrow$ surjektiv).

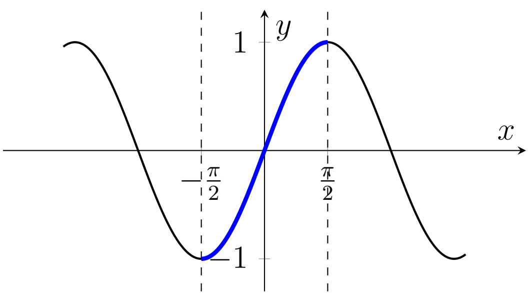
Beispiel mit $f(x) = \sin x$



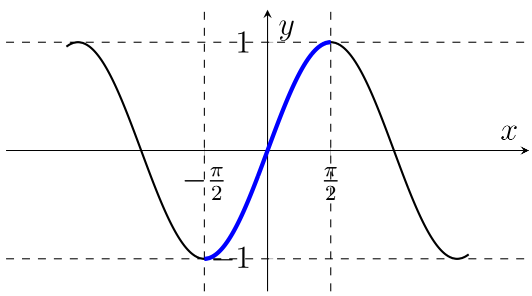
Gegeben: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Eigenschaft: Nicht injektiv
Nicht surjektiv



Gegeben: $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
Eigenschaft: Nicht injektiv
Surjektiv



Gegeben: $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$
Eigenschaft: Injektiv
Nicht surjektiv



Gegeben: $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$
Eigenschaft: $\left.\begin{array}{l}\text{Injektiv}\\ \text{Surjektiv}\end{array}\right\}$ Bijektiv

$\Longrightarrow$ **Durch geeignetes Anpassen des Definitions- und des Wertebereichs lässt sich eine nicht bijektive Funktion bijektiv machen.**

3 Umkehrfunktionen

Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ **bijektiv**, dann hat sie eine **Umkehrfunktion** $f^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ mit

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{D}, \qquad f(f^{-1}(y)) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{W}.$$

Dabei werden Definitions- und Wertebereich vertauscht.

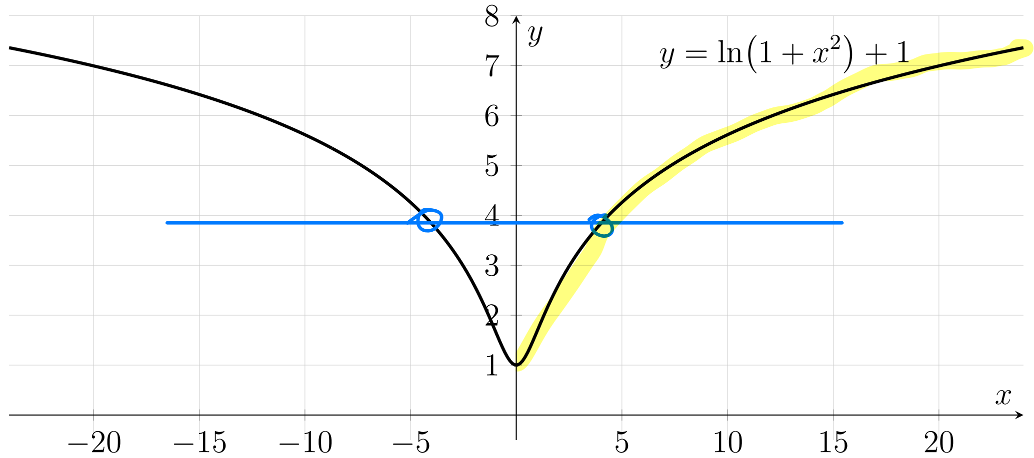
Viele Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind nicht bijektiv. Durch geeignetes Einschränken von Definitions- und Wertebereich kann man f jedoch oft *bijektiv machen*. Dann existiert eine wohldefinierte Umkehrfunktion f^{-1}.

Beispielaufgabe: Umkehrfunktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) + 1$$

1. Bestimme den **Definitionsbereich** $\mathbb{D}_f$.
2. Bestimme den **Wertebereich** $\mathbb{W}_f = f(\mathbb{D}_f)$.
3. Prüfe kurz: Ist $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ injektiv? surjektiv?
4. Wähle einen sinnvollen **eingeschränkten Definitionsbereich** $D' \subseteq \mathbb{D}_f$, so dass $f : D' \to W'$ bijektiv ist.
5. Bestimme die **Umkehrfunktion** von $f^{-1} : W' \to D'$ und gib ihren Definitions- und Wertebereich an. (Hinweis: Bei der Umkehrfunktion ist Definitions- und Wertebereich vertauscht)



$f(x) = \ln(x^2+1) + 1$

1) Definitionsbereich

$1+x^2 > 0 \xrightarrow{-1} x^2 > -1 \longrightarrow x^2$ immer positiv oder 0 $\longrightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$

2) Wertebereich

$x^2 \geq 0 \longrightarrow 1+x^2$ von 1 bis ∞ möglich $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \ln(1)+1 = 1 \\ \ln(\infty)+1 = \infty \end{array}\right\} W_f = [1, \infty)$

3) Injektiv? Surjektiv

Nicht Injektiv

Surjektiv auf W_f

4) Sinnvoll Einschränken für Bijektivität

Positiver Zweig: $D' = [0, \infty)$, $W' = W_f = [1, \infty)$

5) Umkehrfkt. f^{-1}

$$y = \ln(1+x^2) + 1 \quad | -1$$

$$y-1 = \ln(1+x^2) \quad | e^1$$

$$e^{y-1} = e^{\ln(1+x^2)}$$

$$e^{y-1} = 1+x^2 \quad | -1$$

$$e^{y-1} - 1 = x^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{e^{y-1} - 1} = x$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x-1} - 1}}}$$

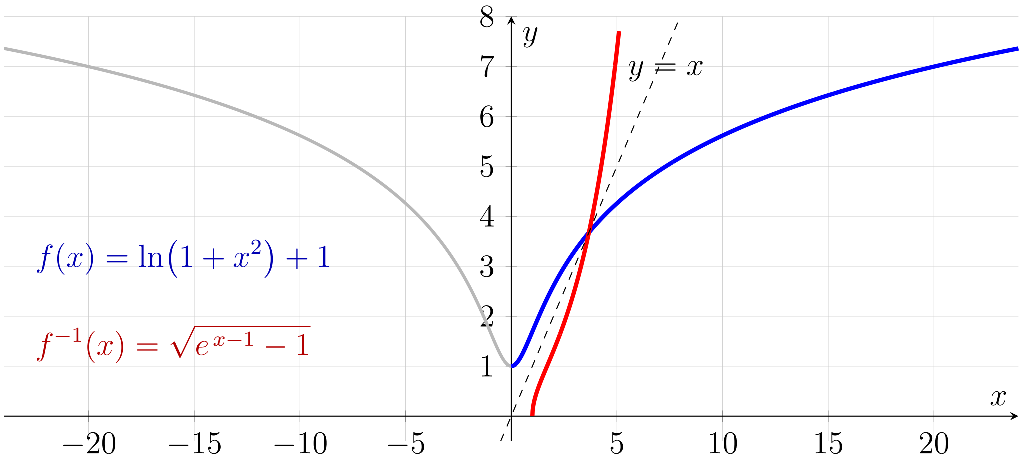
$f^{-1}: W' \longrightarrow D'$

$\underline{\underline{f^{-1}: [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)}}$

Die möglichen Umkehrfunktionen wären:

Positiver Zweig:	$f(x) = \ln\big(1+x^2\big)+1$	$f:\ [0,\infty)\ \longrightarrow\ [1,\infty)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x-1}-1}$	$f^{-1}:\ [1,\infty)\ \longrightarrow\ [0,\infty)$
Negativer Zweig:	$f(x) = \ln\big(1+x^2\big)+1$	$f:\ (-\infty,0]\ \longrightarrow\ [1,\infty)$
	$f^{-1}(x) = -\sqrt{e^{x-1}-1}$	$f^{-1}:\ [1,\infty)\ \longrightarrow\ (-\infty,0]$

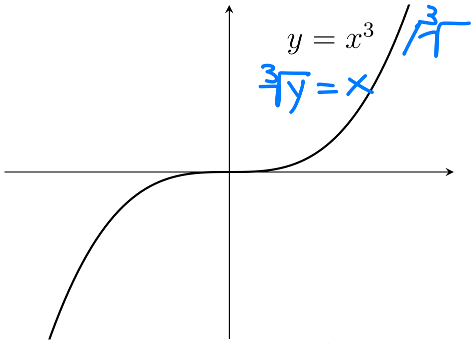
Positiver Zweig und dessen Umkehrfunktion



Spiegelung von Funktion und Umkehrfunktion:
Der Graph von f und der Graph von f^{-1} sind **Spiegelbilder an der Geraden** $y = x$ (*Achsenspiegelung*, keine Punktspiegelung).

Übungsaufgaben für die Studierenden

In diesen Kurzaufgaben sollen jeweils ein **bijektiver** Definitions- und Wertebereich angegeben und die **Umkehrfunktion** bestimmt werden.



$/\sqrt[3]{\ }$

$\sqrt[3]{y} = x$

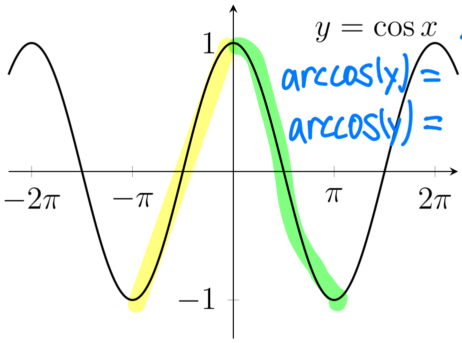
Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Wertebereich: $\mathbb{R}$

Umkehrfunktion: $\sqrt[3]{x}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$



$/ \arccos$

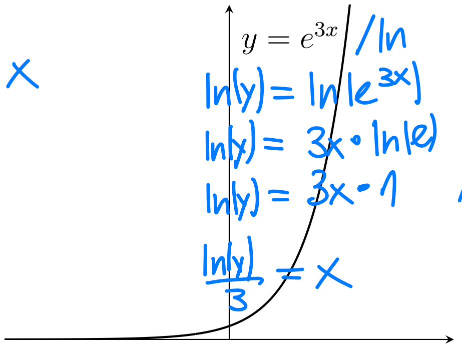
$\arccos(y) = \arccos(\cos(x))$

$\arccos(y) = x$

Definitionsbereich: $[0, \pi]$

Wertebereich: $[-1, 1]$

Umkehrfunktion: $\arccos(x)$



$/\ln$

$\ln(y) = \ln(e^{3x})$

$\ln(y) = 3x \cdot \ln(e)$

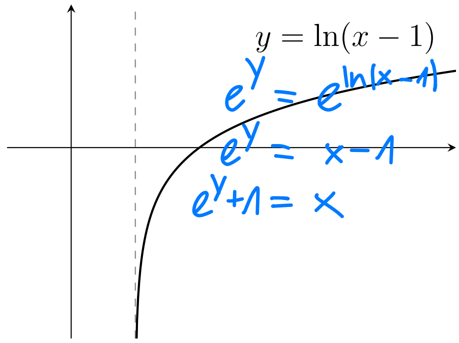
$\ln(y) = 3x \cdot 1 \quad /:3$

$\frac{\ln(y)}{3} = x$

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Wertebereich: $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

Umkehrfunktion: $\frac{1}{3}\ln(x)$



$/e^1$

$e^y = e^{\ln(x-1)}$

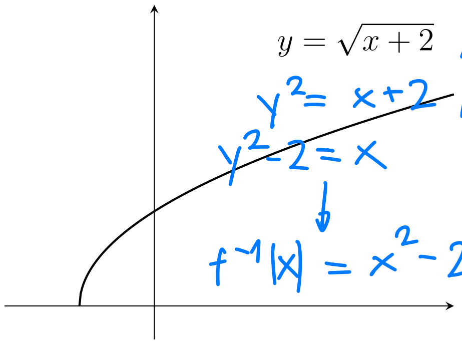
$e^y = x - 1 \quad /+1$

$e^y + 1 = x$

Definitionsbereich: $(1, \infty)$

Wertebereich: $\mathbb{R}$

Umkehrfunktion: $e^x + 1$



$/(\ )^2$

$y^2 = x + 2 \quad /-2$

$y^2 - 2 = x$

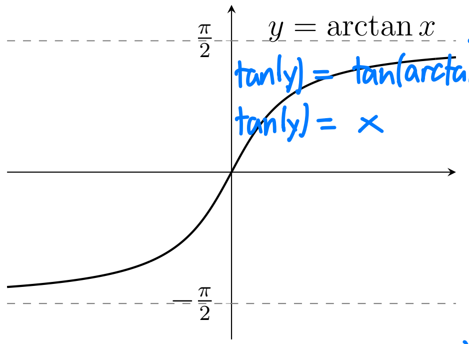
$\downarrow$

$f^{-1}(x) = x^2 - 2$

Definitionsbereich: $[-2, \infty)$

Wertebereich: $[0, \infty)$

Umkehrfunktion: $x^2 - 2$



$/\tan$

$\tan(y) = \tan(\arctan(x))$

$\tan(y) = x$

Definitionsbereich: $(-\infty, \infty)$

Wertebereich: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Umkehrfunktion: $\tan(x)$

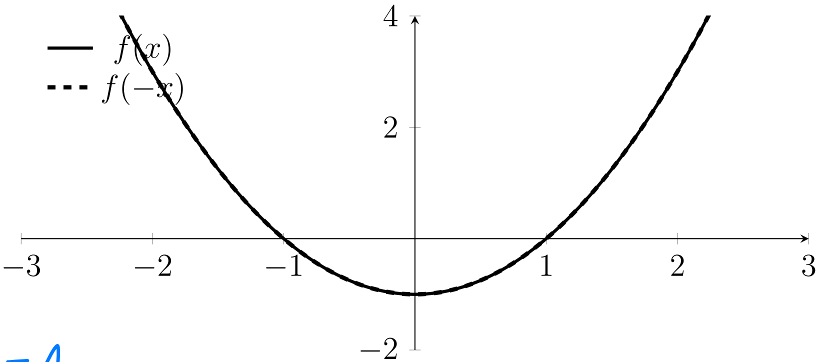
4 Exkurs: Symmetrie von Funktionen

Funktionen lassen sich nach Symmetriekriterien in drei Klassen einteilen: *gerade* (Achsensymmetrie an der y-Achse), *ungerade* (Punktsymmetrie im Ursprung) oder *keine Symmetrie*. Um Zeit zu sparen verwenden wir die Kürzel **E** (even = gerade), **O** (odd = ungerade) und **N** (none = keine Symmetrie).
Hinweis: Diese Abkürzungen sind eine vom TA (Visva Loganathan) eingeführte Arbeitsnotation und ***keine*** *allgemein übliche Konvention in der mathematischen Literatur.*

Zum Prüfen der Symmetrie bildet man stets $f(-x)$

- **Gerade Fkt. (E):** $f(-x) = f(x)$
- **Ungerade Fkt. (O):** $f(-x) = -f(x)$
- **Keine Symmetrie (N):** $f(-x)$ erfüllt keine der beiden obigen Beziehungen

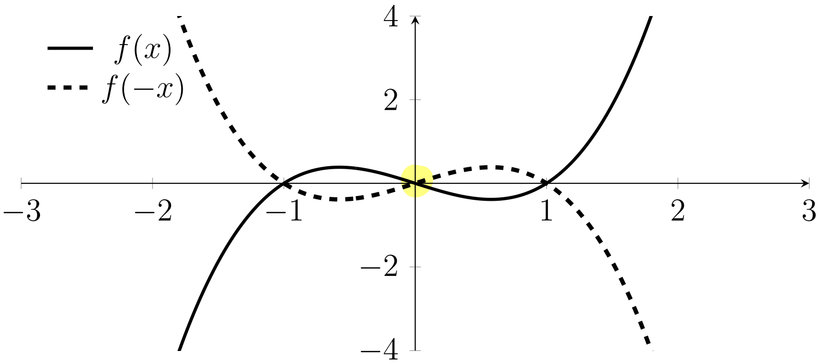
Beispiel (gerade): $f(x) = x^2 - 1$



$f(-x) = (-x)^2 - 1$
$f(-x) = x^2 - 1$
$\underline{f(-x) = f(x)}$

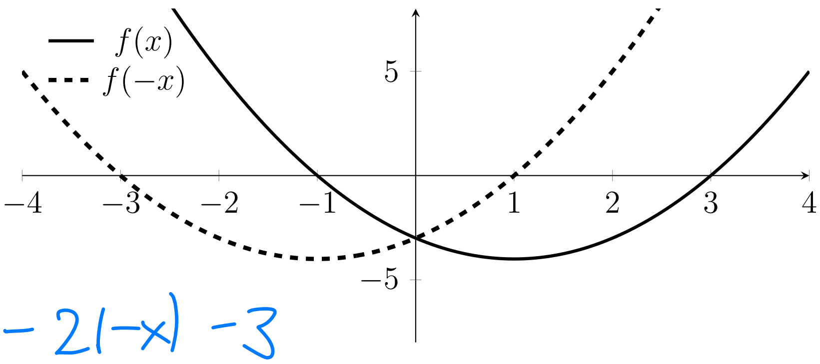
gerade (E)

Beispiel (ungerade): $f(x) = x^3 - x^1$



$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)$$
$$f(-x) = -x^3 + x$$
$$f(-x) = -(x^3 - x)$$
$$\left.\underline{f(-x) = -f(x)}\right\} \text{ ungerade (O)}$$

Beispiel (keine Symmetrie): $f(x) = x^2 - 2x^1 - 3$



$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3$$
$$f(-x) = x^2 + 2x - 3$$

Keine Symmetrie (N)

Schnellreferenz: typische Symmetrien

- **Potenzfunktionen:** x^n ist **E** für gerades $n \in \mathbb{Z}$, **O** für ungerades $n \in \mathbb{Z}$. (Für nicht-ganzzahliges n ist der Definitionsbereich i. d. R. nicht punktsymmetrisch $\Rightarrow$ keine Klassifikation.)
- **Reziproke Potenzen:** $x^{-n} = 1/x^n$ erben dieselbe Parität wie x^n (auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$): gerade für gerades n, ungerade für ungerades n.
- **Absolutwert:** $|x|$ ist **E**.

Gerade (E)

- x^{2k}, $1/x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}_0$)
- Konstante Zahl $c \in \mathbb{R}$
- $|x|$, $|\,g(x)\,|$ (falls g ungerade)
- $\cos x$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$
- e^{ax^2} (mit $a \in \mathbb{R}$)
- $\ln|x|$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ungerade (O)

- x^{2k+1}, $1/x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}_0$)
- $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$
- $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
- $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\tanh x$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$
- $\operatorname{sgn} x$ (Vorzeichenfunktion)
- $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{artanh} x$

Keine Symmetrie (N)

- e^x, $\ln x$ (nur $x > 0$)
- $\arccos x$, $\operatorname{arccot} x$ (auf Standard-Definitionen)
- $\operatorname{arcosh} x$ (Domain $x \geq 1$)
- Linearkombinationen mit gemischter Parität, z. B. $x^2 - 3x - 1$
- Funktionen mit nicht punktsymmetrischem Definitionsbereich, z. B. $\sqrt{x}$

Hinweis: Zusammengesetzte Funktionen erben die Symmetrie oft aus den Bausteinen, z. B. $|\sin x|$ ist **E**, $\sin^2 x$ ist **E**; Details stehen in den Rechen- und Verkettungsregeln.

Symmetrie (E/O/N): Rechenregeln

Kontext: Wir kombinieren zwei (Teil-)funktionen f und g zu einer neuen Funktion mittels Addition, Multiplikation oder Division. Für diese Übersicht genügen die drei Fälle $E \circ E$, $E \circ O$, $O \circ O$; denn es gilt schlicht $E \circ O = O \circ E$. Das gilt gleichermassen für Addition, Multiplikation und Division. Bei der Division f/g gilt ebenfalls noch $g(x) \neq 0$

Addition $(f+g)$:	$E + E = E$	$E + O = \mathbf{N}$	$O + O = O$
Multiplikation $(f \cdot g)$:	$E \cdot E = E$	$E \cdot O = O$	$O \cdot O = E$
Division (f/g) :	$E/E = E$	$E/O = O$ $O/E = O$	$O/O = E$

Hinweis. Treffen in einer Operation Funktionen der Klasse **N** (keine Symmetrie) auf, ist das Ergebnis *im Allgemeinen* wieder **N**. Ausnahmen sind möglich (z. B. spezielle Kombinationen, die zufällig **E** oder **O** ergeben).

Übung: Symmetrie klassifizieren (E/O/N)

Bestimme für jede Funktion, ob sie **E** (gerade), **O** (ungerade) oder **N** (keine Symmetrie) ist.

1. $f(x) = x^2 + 1 = E + E = E$
2. $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{E}{O} = O$
3. $f(x) = \sin x - x = O - O = O$
4. $f(x) = \cos x + x = E + O = N$
5. $f(x) = \sin^2 x = \sin(x) \cdot \sin(x) = O \cdot O = E$
6. $f(x) = \tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{O}{E} = O$
7. $f(x) = \arctan x \cdot \arccos x = O \cdot N = N$
8. $f(x) = \ln(|x|) + 2 = E + E = E$
9. $f(x) = \ln(x) + 2 = N + E = N$
10. $f(x) = |x| + x = E + O = N$

Symmetrie: Verkettete Funktionen

Sei $f = u \circ v = u(v(x))$ mit äusserer Funktion u und innerer Funktion v. Die Parität von f ergibt sich aus der folgenden Übersicht:

	v ist **E**	v ist **O**	v ist **N**
u ist **E**	**E**	**E**	**N**
u ist **O**	**E**	**O**	**N**
u ist **N**	**E**	**N**	**N**

Kurzmerker:

Innere gerade ⇒ Gesamt gerade.

Innere ungerade ⇒ Gesamtsymmetrie folgt der äusseren.

Innere ohne Symmetrie ⇒ keine feste Symmetrie.

Übung: Symmetrie mit Verkettung & Kombination (E/O/N)

Bestimme für jede Funktion, ob sie **E** (gerade), **O** (ungerade) oder **N** (keine Symmetrie) ist. Achte auf den Definitionsbereich.

1. $f(x) = \cos(x^2)$ = E (Innere gerade)
2. $f(x) = \sin(x^3)$ = O (Innere & Äussere Ungerade)
3. $f(x) = \arctan(\sin(x^2))$ = E (Innere gerade)
4. $f(x) = \tan(\underbrace{\cos x}_{E} \cdot \underbrace{\sin x}_{O})$ = O   E · O = O (sin · cos = UNgerade)
5. $f(x) = \cos x + \sin^2 x$ = E
6. $f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{x}$ $(x \neq 0)$ = O ($\cos(x^3)$ = gerade, $\frac{1}{x}$ = UNgerade)
7. $f(x) = e^{\cos(x)}$ = E (Äussere Fkt. e^x keine Symmetrie, aber Innere Fkt $\cos(x)$ gerade)
8. $f(x) = x \cdot \tan(e^{\cosh(x)})$ = O ($e^{\cosh(x)}$ gerade, d.h $\tan(e^{\cosh(x)})$ gerade
   ↳ x ungerade daher $x \cdot \tan(e^{\cosh(x)}) = O$
9. $f(x) = \ln(|\tan(x)|)$ = E (Innere gerade)
10. $f(x) = \dfrac{\arctan(x^3)}{1 + x^2}$ = O $\left(\dfrac{\text{ungerade}}{\text{gerade}}\right)$
11. $f(x) = \sin^5(\cos x)$ = E (sin(cos(x)) gerade daher auch 5. Potenz davon gerade)