Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 3

Komplexe Zahlen II

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 06.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Potenzen komplexer Zahlen (De Moivre)
2. Wurzeln komplexer Zahlen (n-te Wurzeln)
3. Quadratische Gleichungen über $\mathbb{C}$
4. Polynomdivision & Fundamentalsatz der Algebra

1 Potenzen komplexer Zahlen

Kurz-Intuition

- Für $z \neq 0$ schreibe $z = r\,e^{i\varphi}$ (Betrag $r > 0$, Winkel φ).
- **De Moivre:**
$$(re^{i\varphi})^n = r^n\,e^{in\varphi} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
- *Warum Polarform?* Potenzen werden damit „einfach“: Betrag hoch n, Winkel mal n. In Normalform $(a+ib)^n$ würde man viel ausmultiplizieren müssen.
- Nützliche Folgerungen: $|z^n| = |z|^n$ und $\arg(z^n) \equiv n\,\arg(z) \pmod{2\pi}$.

Beispielaufgabe $(1+i)(1+i)\ldots$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Aufgabe: Berechne $(1+i)^{10}$ schnell.

$z = 1+i \longrightarrow r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4$

$z = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$

$z^{10} = (2^{1/2})^{10} \cdot e^{i\pi/4 \cdot 10} = 2^5 \cdot e^{i\frac{5}{2}\pi} = 32 \cdot e^{i\frac{4}{2}\pi + i\cdot\frac{1}{2}\pi} = 32 \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{1} \cdot e^{i\frac{1}{2}\pi}$

$= 32 \cdot 1 \cdot e^{i\pi/2}$

$= 32 \cdot e^{i\pi/2}$

$\underline{\underline{= 32 \cdot i}}$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Erst in Polarform umschreiben, dann De Moivre anwenden.

1. $(-\sqrt{3}+i)^6$ (Hinweis: $r = 2$, $\varphi = 5\pi/6$.)

$z = 2 \cdot e^{i5\pi/6}$

$z^6 = 2^6 \cdot e^{i5\pi} = 64 \cdot e^{i4\pi + i\pi} = 64 \cdot \underbrace{e^{i4\pi}}_{1} \cdot e^{i\pi} = 64 \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -64$

2. $(1-i)^8$ (kurz begründen, ob das Resultat reell ist)

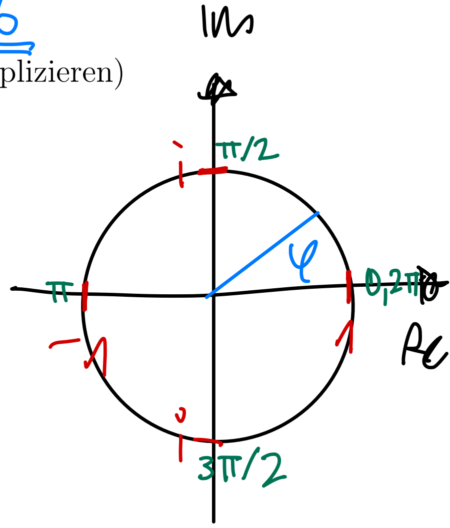
$z = \sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$

$z^8 = (2^{1/2})^8 \cdot e^{-i2\pi} = 2^4 \cdot e^{-i2\pi} = 16 \cdot \overbrace{e^{-i2\pi}}^{1} = \underline{\underline{16}}$

3. Bestimme Betrag und Argument von $(2e^{i\pi/3})^9$ (ohne Ausmultiplizieren)

Betrag $= 2^9 = 512$

Argument $= 9 \cdot \frac{\pi}{3} = 3\pi \xrightarrow{\text{mod}(2\pi)} 1\pi$



2 Wurzeln komplexer Zahlen

Intuition

- Polarform: $z = r\,e^{i\varphi}$ mit $r = |z| > 0$ und $\varphi = \arg z$.
- n-te Wurzeln von $z \neq 0$:

$$w_k = r^{1/n}\,e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

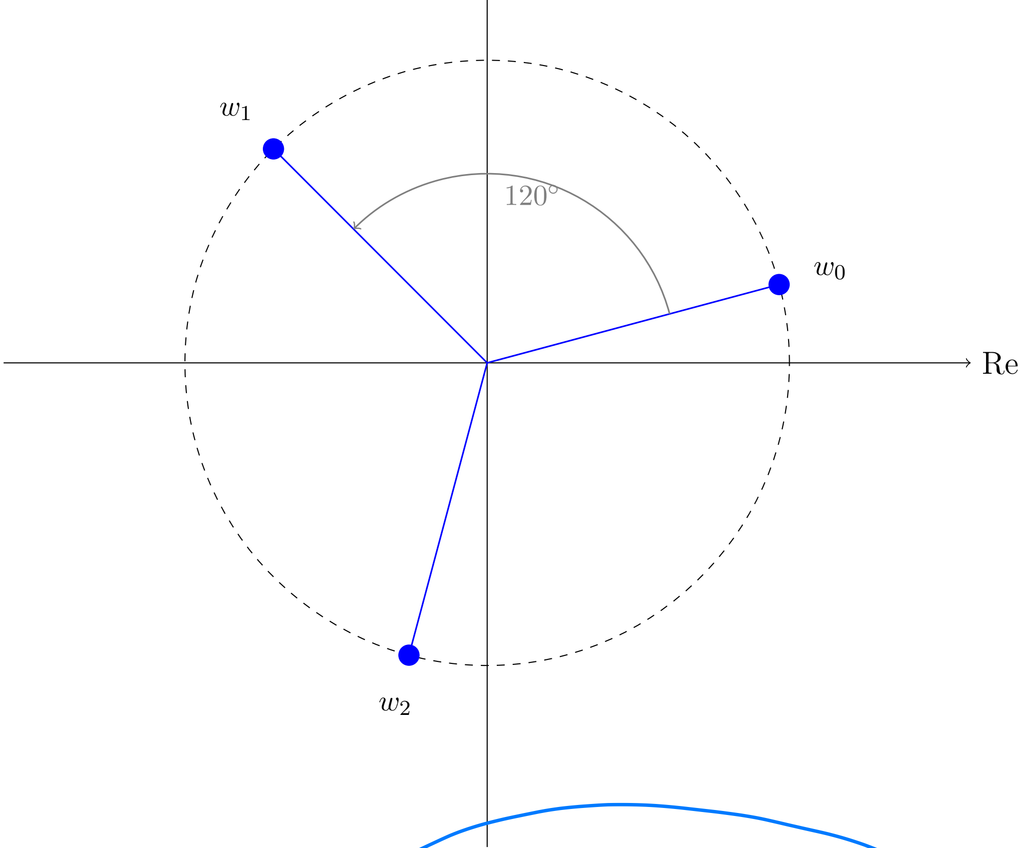
- Geometrie: n Lösungen als regelmässiges n-Eck auf dem Kreis mit Radius $r^{1/n}$.

Beispiel

Bestimme alle Kubikwurzeln von $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i = 8e^{i\pi/4}$

$360^\circ : 3 = 120^\circ$

$360^\circ : 4 = 90^\circ$



$$z = 8e^{i\pi/4}, \quad w_k = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)},\ k = 0, 1, 2$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. Bestimme alle **Kubikwurzeln** von $3 - 3i$

$\sqrt[3]{}$

$z = \sqrt{18} \cdot e^{-i\pi/4}$

$\sqrt[3]{z} = (18^{1/2})^{1/3} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k)/3} = \sqrt[6]{18} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k)}$

$k = 0, 1, 2$

2. Bestimme alle **vierten Wurzeln** von $4e^{i\pi/3}$

$z = 4 \cdot e^{i\pi/3}$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2^2} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{3} + 2\pi k)/4}$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{12} \ \frac{\pi}{2} k)}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

$\sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k)}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

3. Löse $z^5 = -32$ in $\mathbb{C}$ und gib die **Winkelabstände** an

z

$360^\circ : 5 = 72^\circ$

$\frac{2\pi}{5}$

4. Finde die **Quadratwurzeln** von $5i$

$z = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\sqrt{z} = \sqrt{5} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \pi k)}$ $\quad k = 0, 1$

3 Quadratische Gleichungen über $\mathbb{C}$

Intuition

- Für $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ gilt auch in $\mathbb{C}$ die bekannte Formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Die *Diskriminante* $D = b^2 - 4ac$ kann komplex sein. Falls D komplex ist, schreibe $D = re^{i\varphi}$. Dann gilt

$$\sqrt{D} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \quad \text{(zweite Wurzel nicht nötig)}$$

- **Merke (rein reelle Koeffizienten im Polynom):** Komplexe Lösungen treten immer als *komplex konjugierte Paare* auf.

$\sqrt{-1} = i$

- Alternativ geht auch *quadratisch ergänzen*; die Formel ist meist am schnellsten.

Beispielaufgabe

$x^2 + 1 = 0$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 1$

$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$

$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2}$

$x_{1,2} = \pm i$

Löse in $\mathbb{C}$ und gib die Lösungen in Normalform $a + ib$ an:

$$x^2 + (3 - i)x + (2 - 2i) = 0$$

$a = 1,\ b = 3 - i,\ c = 2 - 2i$

$D = b^2 - 4ac = (3-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 2i) = 2i$

$D = 2 \cdot e^{i\pi/2}$

$\sqrt{D} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

$\sqrt{D} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\sqrt{D} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\sqrt{D} = 1 + i$

$x_{1,2} = \frac{-3+i \pm 1+i}{2 \cdot 1}$

$x_{1,2} = \frac{-3+i \pm 1+i}{2}$

$x_1 = \frac{-3+i + 1+i}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$

$x_2 = \frac{-3+i - 1-i}{2} = \frac{-4+0i}{2} = -2$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Nutze die Mitternachtsformel; falls nötig $\sqrt{\cdot}$ über Polarform. Ergebnisse als $a + ib$.

1. $x^2 + x + 1 = 0$ $\quad a=1,\ b=1,\ c=1$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}\cdot i$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2\cdot1}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. $x^2 - 4x + 13 = 0$ (Kontrollfrage: treten konjugierte Paare auf?)

$$D = -36 \longrightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6i$$

$$x_1 = 2+3i$$
$$x_2 = 2-3i$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

3. $x^2 + 2x + (1 + 2i) = 0$ $\quad a=1,\ b=2,\ c=1+2i$

$$D = 2^2 - 4\cdot1\cdot(1+2i) = 4 - 4 - 8i = -8i \xrightarrow[\text{Polarform}]{} D = 8\cdot e^{i3\pi/2}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{8}\cdot e^{i3\pi/4}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{8}\cdot e^{i3\pi/4}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{8}\cdot\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right)$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{8}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{D} = -\sqrt{\frac{8}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}$$

$$\sqrt{D} = -\sqrt{4} + i\sqrt{4}$$

$$\sqrt{D} = -2 + 2i$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm -2+2i}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm -1 + i$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -2+i \\ x_2 &= -i \end{aligned}}$$

4 Fundamentalsatz der Algebra & Polynomdivision

Intuition

- **Fundamentalsatz der Algebra (FFA):** Jedes Polynom p vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheiten) und lässt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(z) = a \prod_{j=1}^{n} (z - z_j).$$

- **Konjugiertenregel (bei Polynomen mit REIN reellen Koeffizienten):** Ist $a + bi$ eine Nullstelle, dann ist auch $a - bi$ eine Nullstelle.

- **Praktisches Vorgehen:**

  1. Eine Nullstelle finden/gegeben (z. B. z_0).
  2. Durch $(z - z_0)$ *dividieren* $\Rightarrow$ Grad sinkt.
  3. Wiederholen, bis ein quadratischer Rest bleibt, dann Mitternachtsformel.

- **Polynomdivision:** Wie schriftliche Division. Ergibt $p(z) = (z - z_0)q(z) + r$; bei Nullstelle z_0 ist der Rest $r = 0$.

Beispielaufgabe

Gegeben sei das Polynom

$$p(z) = z^3 - 4z^2 + 12z - 16$$

Bekannt: 2 ist Nullstelle. Zerlege p vollständig in Linearfaktoren.

Faktor $(z-2)$

$$z^3 - 4z^2 + 12z - 16 : (z-2) = z^2$$

$$-\quad z^3 - 2z^2$$

$$0 \quad -2z^2$$

$-2z^2 + 12z - 16 \; : (z-2) = -2z$

$-\;\; -2z^2 + 4z$

$0 \quad 8z \downarrow$

$8z - 16 \; : (z-2) = 8$

$-\;\; 8z - 16$

0 Rest

Wir sammeln alle grünen Terme zusammen

$$\frac{z^3 - 4z^2 + 12z - 16}{z - 2} = z^2 - 2z + 8$$

$1+3i \longrightarrow 1-3i$

Schwierigere Beispielaufgabe

Gegeben sei das Polynom

$$\boxed{p(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4.}$$

Bekannt: $1 + i$ ist Nullstelle. Zerlege p vollständig in Linearfaktoren.

Polynom rein REELLE Koeff. → Komplex Konj. NST: $1-i$

$$\underbrace{(z-(1+i)) \longrightarrow (z-(1-i))}_{\text{Damit kann man quadratischen Faktor bauen!}}$$

$$q(z) = (z-(1+i))(z-(1-i))$$

$$q(z) = z^2 - 2z + 2$$

$$p(z) : q(z)$$

$$z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 : (z^2 - 2z + 2) = \ldots$$

Damit Polynomdivision machen!

(Übung für die Studierenden)

$$z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 : (z^2 - 2z + 2) = z^2$$

$$- \quad z^4 - 2z^3 + 2z^2$$

$$0 \quad - z^3 \quad + 0$$

$$-z^3 + 0z^2 + 2z - 4 : (z^2 - 2z + 2) = -z$$

$$- \quad -z^3 + 2z^2 - 2z$$

$$-2z^2 + 4z$$

$$-2z^2 + 4z - 4 : (z^2 - 2z + 2) = -2$$

$$- \quad -2z^2 + 4z - 4$$

$$0$$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = z^2 - z - 2$$