Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 2

Komplexe Zahlen I

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 29.09.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Organisatorisches
2. Repetition
3. Begriffe & Rechenregeln
4. Eulersche Formel
5. Umwandlung zwischen Normal- und Polarform

1 Organisatorisches

Hinweis zur Kommunikation. Da die Kommunikation per E-Mail sehr umständlich ist (ich müsste jede Adresse einzeln ins Empfängerfeld setzen), verwende ich für Ankündigungen und kurze Rückfragen einen WhatsApp-Chat. Ich habe dafür eine Gruppe erstellt. Den Beitritt findet ihr über den QR-Code unten.

2 Repetition

Analysis A Serie 1, Aufgabe 3b

Bestimmen Sie Infimum und Supremum dieser Menge. Besitzt die Menge ein Minimum beziehungsweise ein Maximum?

$$M = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 < 0 \,\}$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (a \neq 0)$$

Lösung (zum Vorrechnen)

$x^2 - 3x - 4 < 0$

$(x \pm ?)(x \pm ?)$

$-1 \cdot 4 \quad | \quad -1 + 4 = 3$

$1 \cdot -4 \quad | \quad 1 - 4 = -3$

$-2 \cdot 2 \quad | \quad -2 + 2 = 0$

$(x+1)(x-4)$

$x_1 = -1, \; x_2 = 4$

$x \in (-1, 4)$

$$\boxed{\begin{aligned} \inf(M) &= -1 \\ \sup(M) &= 4 \end{aligned}}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$1x^2 - 3x - 4$

$a = 1, \; b = -3, \; c = -4$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot -4}}{2 \cdot 1}$$

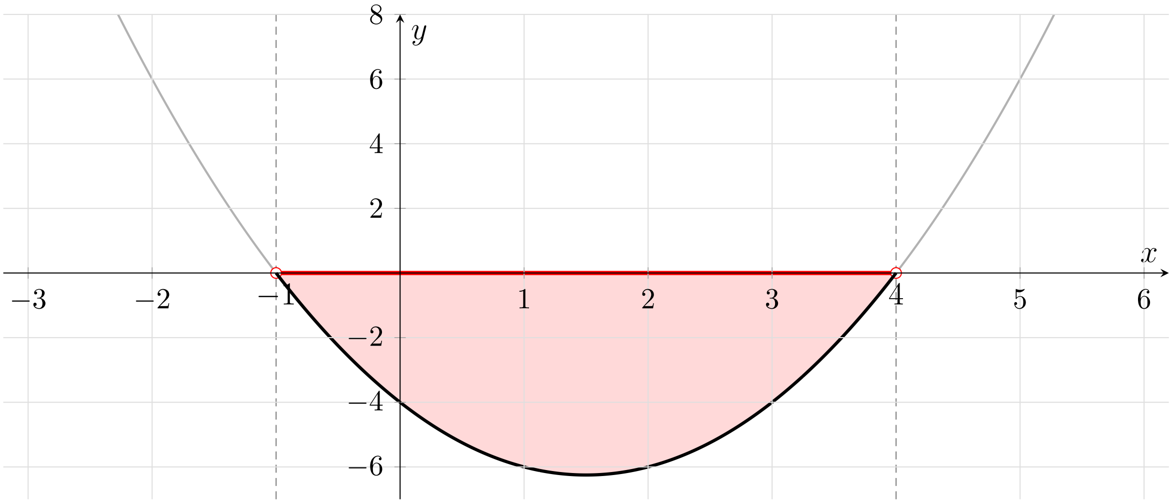
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = 4$



$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 < 0\} = (-1, 4)$$

3 Begriffe & Rechenregeln (Komplexe Zahlen)

Grundbegriffe. Eine komplexe Zahl ist von der Form

$z = x + iy$

$$z = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

$\mathrm{Re}(z) = a$ heisst *Realteil*, $\mathrm{Im}(z) = b$ *Imaginärteil*. Die *komplex Konjugierte* ist $\overline{z} = a - ib$ Der *Betrag* (Modul) ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

Rechenregeln. Für $z = a + ib$, $w = c + id$ gelten:

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d),$$

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \ (w \neq 0),$$

$$|zw| = |z|\,|w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ (w \neq 0),$$

$$z = 0 \iff |z| = 0$$

Division (Rezept). Für $w \neq 0$:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ (z \neq 0)$$

$$\frac{z}{w} \cdot \overbrace{\frac{\overline{w}}{\overline{w}}}^{1} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Beispielaufgaben

$1-7i$

$(2-3i)-(1+4i) \quad = 2-3i-1-4i = 1-7i$

$(2-3i)(1+4i) \quad = 2+8i-3i-12i^2 = 2+5i+12 = 14+5i$

$\dfrac{3-2i}{1+i} \quad = \dfrac{3-2i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{3-3i-2i-2}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. Bestimme $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), \overline{z}, |z|$ für $z = -1+3i$

   $\operatorname{Re}(z) = -1$, $\overline{z} = -1-3i$

   $\operatorname{Im}(z) = 3$, $|z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

2. Vereinfache $(1-2i)^2$ und $\dfrac{2+i}{1-3i}$ (in Normalform $a+ib$)

   $-3-4i$

   $\left[-\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i\right]$

$z = a+ib$

3. Zeige: $|z+\overline{z}| = 2|\operatorname{Re}(z)|$ und $|z-\overline{z}| = 2|\operatorname{Im}(z)|$

   $|a+ib+a-ib| = |2a| = \sqrt{(2a)^2+0^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 2|\operatorname{Re}(z)|$

   $|a+ib-(a-ib)| = |a+ib-a+ib| = |2ib| = 2|ib| = 2\sqrt{0^2+b^2} = 2|b| = 2|\operatorname{Im}(z)|$

4. Beweise kurz: $|z|^2 = z\overline{z}$

   $|z|^2 = a^2+b^2 \quad | \quad z\overline{z} = (a+bi)(a-ib) = a^2+b^2$ $\Big\}$ $|z|^2 = z\overline{z}$ $\Big\}$ $a^2+b^2 = a^2+b^2$

5. Vereinfache $\dfrac{10+2i}{4i-2}$

   $\left\{ \dfrac{10+2i}{4i-2} \cdot \dfrac{-2-4i}{-2-4i} = \right\}$

   Vorzeichen vom Imaginärteil umdrehen

4 Eulersche Formel

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Sofort folgt mit Real- und Imaginärteil:

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$$\cos t = \mathrm{Re}\big(e^{it}\big), \qquad \sin t = \mathrm{Im}\big(e^{it}\big)$$

$\sqrt{e^{it} \cdot e^{-it}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$

Rechenregeln

$$|e^{it}| = 1, \qquad \overline{e^{it}} = e^{-it}, \qquad e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Daraus entstehen die *Additionstheoreme*:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}, \qquad \boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Exponentialdarstellung trigonometrischer Funktionen. Aus $e^{it} = \cos t + i \sin t$ und $e^{-it} = \cos t - i \sin t$:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

Beispiele

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad \text{(Euler-Identität: } e^{i\pi} + 1 = 0\text{)}$$

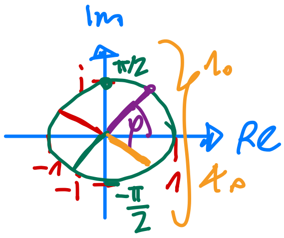
$$e^{i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Typische Stolpersteine.

- $\arg(z)$ ist nur bis auf $2\pi k$ eindeutig; Quadrant beachten (Vorzeichen von x, y).
- $e^{i\alpha} + e^{i\beta} \neq e^{i(\alpha+\beta)}$ (nur für Produkte gilt die Exponentialregel).
- Bei Division immer $r \neq 0$ und φ-Differenz korrekt wählen.

10 + 10i

z = -3 + 1i



5 Polarform

Eine komplexe Zahl z kann man auch über **Betrag** und **Winkel** schreiben:

$$z = r\,e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z| \geq 0, \quad \varphi = \arg(z) \text{ (Winkel)}$$

Intuition: r ist die Entfernung vom Ursprung, φ ist der Drehwinkel (in Radiant). Vorteil: Produkte/Quotienten und Potenzen lassen sich sehr leicht rechnen:

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Hinweis: Der Winkel φ ist nur bis auf $2\pi k$ eindeutig; für $z = 0$ gibt es kein sinnvolles φ

Umrechnung Polarform ↔ Normalform

$z = 3 + i \qquad z = 3 - i$

Polar → Normal	**Normal → Polar**
$z = x + iy$	$z = re^{i\varphi}$
$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $x = r\cos\varphi,$ $y = r\sin\varphi$	$r = \sqrt{x^2+y^2},$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ falls $x > 0,$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ falls $x < 0,\ y \geq 0,$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ falls $x < 0,\ y < 0,$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $x = 0,\ y > 0, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $x = 0,\ y < 0.$

Beispielaufgaben: Polar → Normal

1. $z_1 = 3\,e^{i\pi/6} = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

2. $z_2 = 5\,e^{-i\,3\pi/4} = 5\cdot\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

3. $z_3 = 2\,e^{i\,5\pi/3}$

Beispielaufgaben: Normal → Polar

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ (x, y)

$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \mid x > 0$

$r = |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$z_1 = 2\cdot e^{i\pi/3}$

2. $z_2 = -2 + 2\,i$

$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi \quad \mid x < 0,\ y > 0$

$\varphi = \arctan(-1) + \pi$

$-\frac{1}{4}\pi + \frac{4}{4}\pi \rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi, \quad r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$z_2 = \sqrt{8}\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}$

3. $z_3 = -3 - 3\sqrt{3}\,i$

$x < 0 \mid y < 0$

$\varphi = \arctan\left(\frac{-3\sqrt{3}}{-3}\right) - \pi$

$\varphi = \arctan(\sqrt{3}) - \pi$

$\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

$r = |z| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 9\cdot 3} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36}$

$r = 6$

$z_3 = 6\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

MC – Polarform $z = re^{i\varphi}$

1. Sei $z = 3 - 3\sqrt{3}\,i$. Welche Polarform ist korrekt?

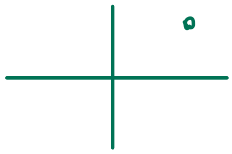
   (a) $z = 6\,e^{i\pi/3}$

   (b) $z = 6\,e^{-i2\pi/3}$

   (c) $z = 6\,e^{i5\pi/3}$

   (d) $z = 6\,e^{-i\pi/3}$

2. Für $z = re^{i\varphi}$ gilt stets:

   $\frac{\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{13\pi}{4}$

   (a) $r = \mathrm{Re}(z)$

   (b) $r = |z|$

   (c) $\varphi = \mathrm{Im}(z)$

   (d) $\varphi = \arg(z) \in \mathbb{R}$ eindeutig

   $2 \cdot 3 = 6$

3. Sei $z = 2e^{i\pi/4}$ und $w = 3e^{-i\pi/6}$. Was ist zw?

   (a) $6e^{i\pi/12}$

   (b) $6e^{i5\pi/12}$

   (c) $5e^{i\pi/12}$

   (d) $6e^{i\pi/3}$

   $r_1 = 2,\ r_2 = 3 \rightarrow r = r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot 3 = 6$

   $\varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} \rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{1\pi}{12}$

4. Für $z = re^{i\varphi} \neq 0$ ist $\frac{1}{z}$ gleich:

   (a) $\frac{1}{r}\,e^{i\varphi}$

   (b) $r\,e^{-i\varphi}$

   (c) $\frac{1}{r}\,e^{-i\varphi}$

   (d) $r\,e^{i\varphi}$

   $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r \cdot e^{-i\varphi}}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$

5. Wähle die korrekte Aussage.

   (a) $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

   (b) $|re^{i\varphi}| = r$

   (c) $\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$

   (d) $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

   $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = r \cdot e^{i\varphi} \cdot r \cdot e^{-i\varphi}$
   $= r^2 \cdot e^{i\varphi - i\varphi}$
   $= r^2 \cdot e^0$

   $|z|^2 = r^2 \quad /\sqrt{\ }$

   $|z| = r$

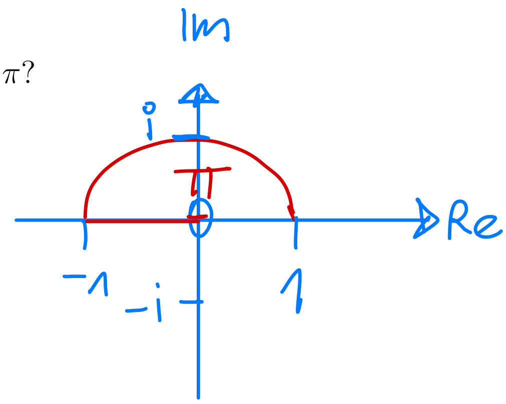
6. Hauptargument: Für welches z ist $(z) = \pi$?

(a) $z = -2 - 5i$

(b) $z = -3$

(c) $z = 3$

(d) $z = 5i$



Formeln Polarform $z = r\, e^{i\varphi}$

Kehrwert: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\varphi}$ Konjugierte: $\overline{z} = r\, e^{-i\varphi}$ Betrag: $|z|^2 = r^2$

Beispielaufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimme zwei reelle Zahlen x, y, so dass

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

$$(x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 + i^2 y^2 + 2ixy$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\downarrow$$

$$a + ib = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Gleichung aufteilen in Reell & Komplex

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \end{bmatrix}$$

$$b^2 = (2xy)^2$$

$$b^2 = 4x^2y^2$$

$$a = x^2 - y^2 \qquad / \cdot 4x^2$$

$$4ax^2 = 4x^4 - \underbrace{4x^2y^2}_{b^2}$$

$$4ax^2 = 4x^4 - b^2 \qquad / - 4ax^2$$

$$0 = 4x^4 - 4ax^2 - b^2$$

↓ Polynomgleichung 4. Grades → Substitution

$$u = x^2$$

↓ 4

$$0 = 4u^2 - 4au - b^2$$

↓ Mitternachtsformel $a=4,\ b=-4a,\ c=-b^2$] Nicht verwirren lassen von Notation

$$u_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{(-4a)^2 - 4\cdot 4\cdot(-b^2)}}{2\cdot 4}$$

$$u_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{2\cdot 4}$$

$$u_{1,2} = \frac{4a \pm 4\sqrt{a^2+b^2}}{2\cdot 4}$$

$$u_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

↓ $\sqrt{u} = x$

$$x = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

"äquivalent findet man y"

$$y = \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$