Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 1

Logik, Mengen & Zahlen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 22.09.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Organisatorisches
2. Aussagenlogik & Quantoren
3. Mengen & Intervalle
4. Schranken (Supremum & Infimum, Maximum & Minimum)
5. Definitionsmenge & Wertemenge
6. Vollständige Induktion

1 Organisatorisches

- Übungsstunde: Montag 8:00 - 9:45 HIL E7
- Serienabgabe: Freitag 18:00, Moodle
- Bei der abgegebene Serie, eine Aufgabe wo man besonders genaue Korrektur will mit einem Stern markieren
- Bei Fragen: E-Mail an vloganathan@student.ethz.ch
- Jahresprüfung im Sommer: Analysis A & B
- Hilfsmittel bei der Prüfung: 20 beschriftete A4-Seiten an Prüfung erlaubt & herkömmliche Formelsammlung
- Materialen: Siehe Link (oben)

2 Aussagenlogik & Quantoren

Aussagenlogik

Aussagen sind wahr/falsch. Quantoren: $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt mindestens ein), $\exists!$ (genau ein), $\nexists$ (kein). Operatoren: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Negationen der Quantoren:

$$\neg(\forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x), \qquad \neg(\exists x\, A(x)) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x).$$

Wichtig: Quantorenreihenfolge ist nicht vertauschbar (z. B. $\forall x\, \exists y:\ x < y$ wahr, $\exists y\, \forall x:\ x < y$ falsch).

Übungsaufgaben

1. **Wahr/Falsch** (kurz begründen):
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}:\ x < y$ Wahr: Für jede reelle Zahl x hat es eine grössere reelle Zahl y
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}:\ x < y$ Falsch: Impliziert das es eine grösste reelle Zahl y gibt
2. **Formalisieren**:
   (a) ($\mathbb{R}$) Es gibt *keine* Zahl, deren Quadrat negativ ist. $\neg \exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$
   (b) ($\mathbb{Z}$) Jede ganze Zahl hat einen Nachfolger. $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists m \in \mathbb{Z}: m = n+1$
   (c) ($\mathbb{R}$) Es existiert genau ein x mit $x^2 = 1$ und $x > 0$. $\exists! x \in \mathbb{R}: x^2 = 1 \wedge x > 0$

3 Mengen & Intervalle

Mengen und Intervalle

offen halboffen

Elementschreibweise: $x \in M$, leere Menge $\emptyset$, Teilmenge $A \subseteq B$. Intervalle: (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, ausserdem $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$. Zahlmengen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

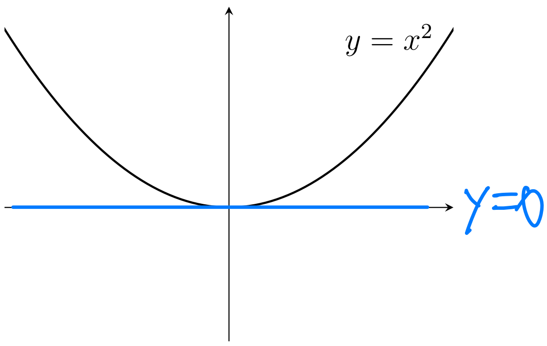
geschlossen

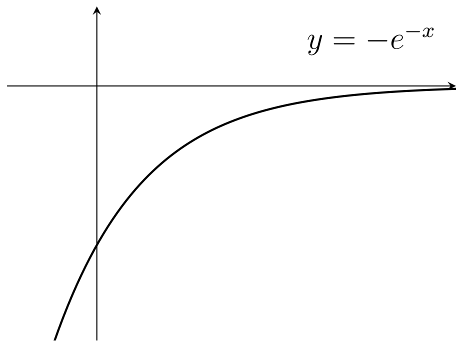
4 Schranken

- **Obere Schranke (Deckel):** Eine Zahl O, so dass *alle* Werte der Menge/Funktion *darunter oder genau darauf* liegen. (Horizontale Linie $y = O$, der gesamte Graph liegt darunter.)
- **Untere Schranke (Boden):** Eine Zahl U, so dass *alle* Werte *darüber oder genau darauf* liegen. (Horizontale Linie $y = U$, der gesamte Graph liegt darüber.)
- **Beschränktheit:** „Oben beschränkt“ $\Rightarrow$ es gibt wenigstens einen Deckel. „Unten beschränkt“ $\Rightarrow$ es gibt wenigstens einen Boden.

Bildsprache zum Mitnehmen: Deckel/Boden sind horizontale Linien, die die Werte „einsperren“.
Der *engste* Deckel/Boden ist das, was wir **Supremum**/**Infimum** nennen; wenn der Graph ihn berührt, heißt er zusätzlich **Maximum**/**Minimum**.

Beispiele

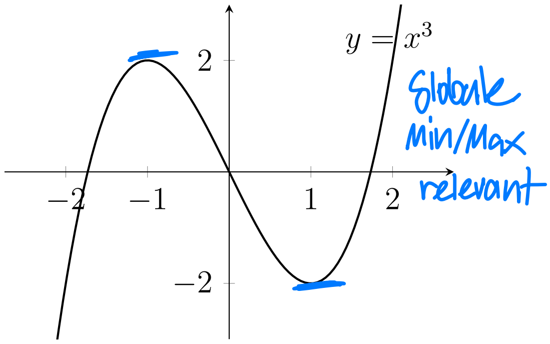




Werteintervall: $y \in [0, \infty)$
Beschränktheit: Nur unten Beschränkt
Schranken: Min $(y=0)$

Werteintervall: $y \in (-\infty, 0)$
Beschränktheit: Nur nach oben beschränkt
Schranken: Sup $(y=0)$

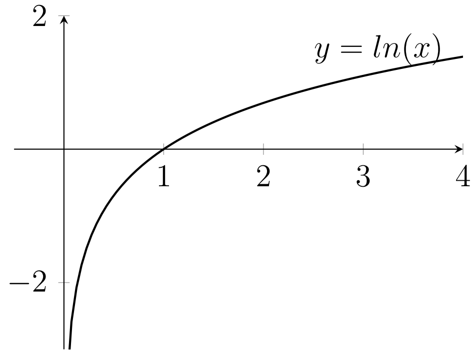
Übungsaufgaben



Werteintervall: $y \in (-\infty, \infty)$

Beschränktheit: Unbeschränkt

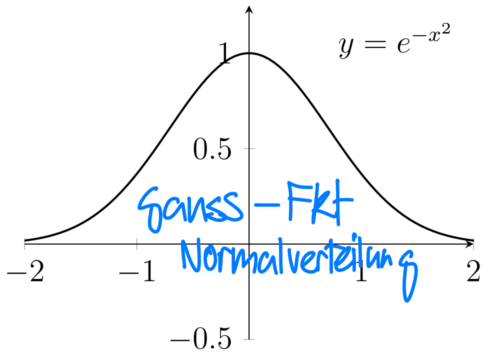
Schranken: —



Werteintervall: $y \in (-\infty, \infty)$

Beschränktheit: Nicht beschr.

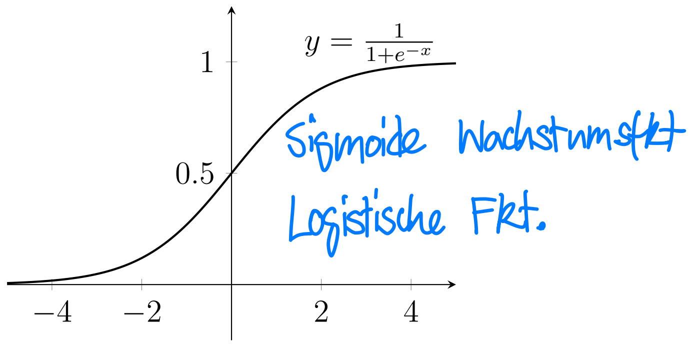
Schranken: —



Werteintervall: $y \in (0, 1]$

Beschränktheit: Beidseitig Beschr.

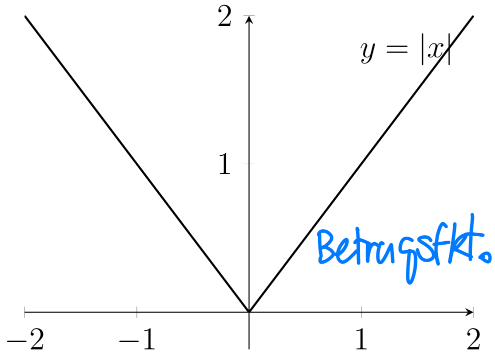
Schranken: Inf $(y=0)$, Max $(y=1)$



Werteintervall: $y \in (0, 1)$

Beschränktheit: Beidseitig

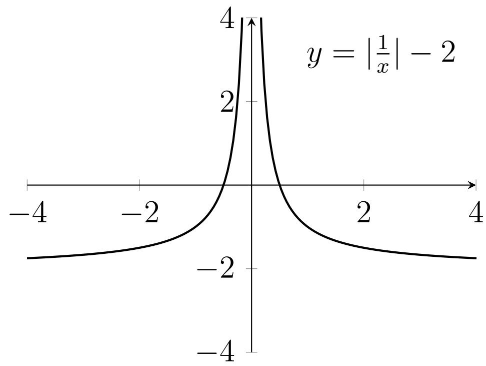
Schranken: Inf $(y=0)$, Sup $(y=1)$



Werteintervall: $y \in [0, \infty)$

Beschränktheit: Nur Unten beschr.

Schranken: Min $(y=0)$



Werteintervall: $y \in (-2, \infty)$

Beschränktheit: Nur Unten beschr.

Schranken: Inf $(y=-2)$

5 Definitionsmenge & Wertemenge

Definitionsmenge

(Domain): Welche x-Werte *darf* ich in die Funktionsvorschrift einsetzen? Denk an „Verbotsschilder“:

- **Nenner** darf nie 0 sein (z. B. $\frac{1}{x-2}$: $x \neq 2$).
- **Gerade Wurzel**: Ausdruck unter der Wurzel ≥ 0 (z. B. $\sqrt{x-1}$: $x \geq 1$).
- **Logarithmus**: Argument > 0 (z. B. $\ln(x+3)$: $x > -3$).
- **Verkettung**: Erst die innere, dann die äussere Bedingung prüfen.

Nenner: $x-2 \neq 0 \quad /+2$

$x \neq 2$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x-1 \geq 0 \quad /+1$

$x \geq 1 \rightarrow D = [1, \infty)$

$x+3 > 0 \quad /-3$

$x > -3 \rightarrow D = (-3, \infty)$

Wertemenge

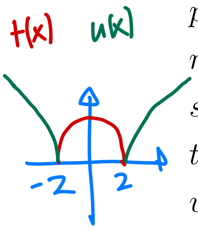
(Range): Alle y-Werte, die die Funktion *annehmen kann*. Am Graphen sind das alle „Höhen“, die der Graph erreicht. Man findet sie oft über

- grobes Skizzieren/Denken in Grenzwerten ($x \to \pm\infty$),
- Monotonie/Symmetrien,
- oder per Umformen nach x (falls machbar).

Übungsaufgaben — nur Definitionsmenge

$f(x) = x^2$	$D = \mathbb{R}$
$g(x) = \sqrt{x-1}$	$D = [1, \infty)$
$h(x) = \dfrac{1}{x-2}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$p(x) = \ln(x+3)$	$D = (-3, \infty)$
$r(x) = e^{-x}$	$D = \mathbb{R}$
$s(x) = \lvert x-2 \rvert$	$D = \mathbb{R}$
$t(x) = \sqrt{4-x^2}$	$D = [-2, 2]$
$u(x) = \sqrt{x^2-4}$	$D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
$v(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$w(x) = \ln \lvert x \rvert$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$a(x) = \tan x$	$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$b(x) = \arcsin x$	$D = [-1, 1]$
$c(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$d(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$e(x) = \sqrt{\underbrace{\ln(x)}_{(0,\infty)}}$	$D = [1, \infty)$

$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$



$4-x^2 \geq 0 \quad /+x^2$

$4 \geq x^2 \quad /\sqrt{\ }$

$-2 \leq x \leq 2$

$x^2-4 \geq 0 \quad /+4$

$x^2 \geq 4 \quad /\sqrt{\ }$

$\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right]$

$x \in \mathbb{R} \mid \lvert x \rvert \geq 2$

$x^2-1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \longrightarrow \cos(x) = 0 \xrightarrow{\text{wenn}} x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2} \ldots$

6 Vollständige Induktion

Beispielaufgabe

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; 1 + 2 + \cdots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung (zum Vorrechnen)

Induktionsanfang (IA)

Für $n=1$ stimmt die Gleichung: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

$\underline{\underline{1=1}}$ ✓

Induktionsschritt (IS)

Dann gilt für $n+1$:

I) $1+2 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

II) $1+2 \ldots + n + n+1) = \underbrace{\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}}_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

II) − I)

$$\cancel{1+2+\ldots} n + n+1 - \cancel{(1+2\ldots+n)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

$$n+1 = \frac{n+1}{2}\left(n+2-n\right)$$

$$n+1 = \frac{n+1}{2}\cdot 2$$

$$\underline{\underline{n+1 = n+1}} \quad \checkmark$$